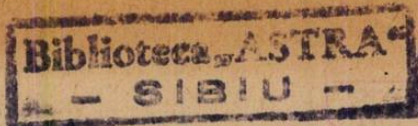


N 3301



8773

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCITII

ANUL XIV. No. 4

1 IANUARIE 1948

09.11.11.2014

22

~~9093~~

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICA
CALEA GRIVITEI, 158. BUCURESTI 2. — TELEFON 7-3803

83511

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCII

ANUL XIV. No. 4

1 IANUARIE 1948

ABONAMENTUL LEI 180 PE AN (9 numere)

Pentru instituții și biblioteci lei 400

Soluții și orice corespondență pe adresa: ING. C. IONESCU-ȚIU

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

REGULI DE DIVIZIBILITATE

(Urmare dela pagina 46)

3. **Metoda I.** a) Să ne propunem să găsim o regulă de divizibilitate pentru divizorul 40. Divizăm prin 40 succesiv numerele șirului 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000, etc. Fiecare împărțire va da un rest mai mic decât 40 și după cel mult patruzeci împărțiri, găsim sau un rest nul sau vreunul din resturile deja găsite.

Găsim că 1000 împărțit la 40 dă restul zero. Prin urmare un număr oarecare îl vom desface într-o sumă de două părți: *una* formată din miile acestui număr și *a doua* formată din ultimele *trei* cifre dela dreapta numărului considerat. De aici deducem următoarea regulă:

Un număr este divizibil cu 40 când numărul format de ultimele trei cifre la dreapta este divizibil prin 40.

b) **Divizibilitatea cu 7.** Avem:

$$1 = 7 + 1, 10 = 7 + 3, 100 = 7 + 2,$$

$$1000 = 7 + 6, 10.000 = 7 + 4, 100.000 = 7 + 5,$$

$$1.000.000 = 7 + 1, \text{ etc.}$$

Așa dar resturile 1, 3, 2, 6, 4, 5 se reproduc la nesfârșit în aceeași ordine.

Să considerăm numărul de șase cifre $abcdef$. Din cele de mai sus rezultă:

$$abcdef = 7 + (f + 3e + 2d + 6c + 4b + 5a)$$

Dacă și partea a doua este divizibilă cu 7, întregul număr este divizibil prin 7. De aici deducem următoarea regulă:

Pentru a vedea dacă un număr este divizibil prin 7, îl desfacem în grupe de câte șase cifre; înmulțim cifrele primei grupe, începând dela dreapta respectiv cu 1, 3, 2, 6, 4, 5, continuăm

83511

cu a doua grupă, etc. și facem suma; dacă suma astfel obținută e divizibilă cu 7, întregul număr e divizibil cu 7.

Exemplu. Să vedem dacă numărul 377801998952 este sau nu divizibil cu 7. Micșorăm mai întâi cu 7 fiecare cifră a numărului, egală sau mai mare ca 7: reiese numărul 300101221252. Făcând operația indicată mai sus găsim, diminuând cu 7 orice produs superior lui 7: 100201316412. Făcând suma cifrelor acestui din urmă număr găsim un rezultat divizibil cu 7.

Deci numărul considerat la început este divizibil cu 7.

Observație. Putem scrie:

$$1 = M7 + 1, 10 = M7 + 3, 100 = M7 + 2, 1000 = M7 - 1, \\ 10.000 = M7 - 3, 100.000 = M7 - 2.$$

Dacă luăm numărul următor $abcde fghijkl$, conform acestei observații vom avea

$$abcde fghijkl = M7 + \left[(l + 3k + 2j) - (i + 3h + 2g) \right. \\ \left. + (f + 3e + 2d) - (c + 3b + 2a) \right]$$

De unde avem regula:

Pentru a stabili dacă un număr este divizibil cu 7, îl desfacem în grupe de câte trei cifre începând dela dreapta; înmulțim la fiecare grupă de ordin fără soț cifrele cu 1, 3, 2 începând dela dreapta; facem aceeași operație pentru grupele de ordin cu soț; facem diferența sumelor obținute și dacă această diferență este divizibilă cu 7, întreg numărul este divizibil prin 7.

c) Să considerăm divizorul 11. Avem:

$$1 = M11 + 1, 10 = M11 + 10, 100 = M11 + 1, \\ 1000 = M11 + 10, \text{ etc.}$$

Fie numărul

$$abcde f = 10^5 \cdot a + 10^4 \cdot b + 10^3 \cdot c + 10^2 \cdot d + 10e + f \\ f = M11 + f \\ 10 \cdot e = M11 + 10e \\ 10^2 \cdot d = M11 + d \\ 10^3 \cdot c = M11 + 10c \\ 10^4 \cdot b = M11 + b \\ 10^5 \cdot a = M11 + 10a \\ abcde f = M11 + (ef + cd + ab).$$

Deci:

Un număr e divizibil prin 11, dacă suma numerelor de câte două cifre, în care s'a desfăcut numărul dat începând dela dreapta, este divizibilă cu 11.

Exemplu. Se cere restul împărțirii numărului 753420639891 prin 11. Facem suma $91 + 98 + 63 + 20 + 34 + 75 = 381$. Pentru 381 facem $81 + 3 = 84$ care divizat cu 11 dă restul 7, care este restul împărțirii numărului dat prin 11.

d) Să considerăm divizorul 13. Avem:

$$\begin{aligned} 1 &= M13 + 1, \quad 10 = M13 + 10, \quad 100 = M13 + 9, \\ 1000 &= M13 + 12, \quad 10.000 = M13 + 3, \quad 100.000 = M13 + 4, \\ 1.000.000 &= M13 + 1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Resturile sunt 1, 10, 9, 12, 3, 4 sau 1, 10, 9, — 1, — 10, — 9.

Să se considere acum numărul următor de șase cifre $abcdef$:

$$\begin{aligned} f &= M13 + f \\ 10 \cdot e &= M13 + 10e \\ 10^2 \cdot d &= M13 + 9d \\ 10^3 \cdot c &= M13 + 12c = M13 - c \\ 10^4 \cdot b &= M13 + 3b = M13 - 10b \\ 10^5 \cdot a &= M13 + 4a = M13 - 9a \\ abcdef &= M13 + (f + 10e + 9d + 12c + 3b + 4a) \\ &= M13 + [(f + 10e + 9d) - (c + 10b + 9a)] \end{aligned}$$

Regula ce rezultă se enunță foarte ușor.

e) *Diviziunea prin 12.* La fel avem:

$$\begin{aligned} 1 &= M12 + 1, \quad 10 = M12 + 10, \quad 100 = M12 + 4, \quad 1000 = \\ &M12 + 4, \quad 10.000 = M12 + 4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Pentru un număr oarecare avem:

$$abcdef = M12 + ef + 4(d + c + b + a).$$

Prin urmare, un număr este divizibil cu 12, când suma obținută adunând numărul format de ultimile două cifre cu de patru ori suma celorlalte cifre, este divizibilă cu 12.

f) Procedând prin aceeași metodă, găsim reguli de divizibilitate cu 15 și 16. Astfel avem:

$$\begin{aligned} abcdefg &= M15 + g + 10(a + b + c + d + e + f) \\ abcde &= M16 + (e + 10d + 4c + 8b) \end{aligned}$$

Aşa dar urmează că :

Un număr este divizibil cu 15 când suma formată din cifra unităţilor plus de zece ori suma celorlalte cifre, este divizibilă cu 15.

Un număr este divizibil cu 16, când suma obţinută, înmulţind cifrele unităţilor, zecilor, sutelor şi miilor respectiv cu 1, 10, 4, 8 şi adunând, este divizibilă cu 16.

g) Pentru cazul divizorului 17, considerând $1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}, 10^{12}, 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}$, resturile corespunzătoare sunt 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12; sau, primele opt resturi şi complementele aritmetice faţă de 17 ale celorlalte opt. Se vede că pentru enunţarea regulii corespunzătoare de divizibilitate, se pune problema împărţirii numărului dat în grupe de câte opt cifre. Enunţarea e deci simplă.

Procedând aşa dar cu metoda I, am stabilit reguli interesante de divizibilitate pentru câţiva divizori; se pot considera alţi divizori şi aceeaşi metodă.

(Va urma)

VIRGIL CLAUDIAN.

EXERCITII REZOLVATE

Clasa a III-a. Exerc. 336. *Intr'un triunghi ABC cu toate unghiurile ascuţite ducem înălţimile AA_1, BB_1 . Să se arate că*

$$\frac{\overline{AA_1} + \overline{AB_1}}{\overline{BB_1} + \overline{BA_1}} = \frac{\overline{BB_1} - \overline{BA_1}}{\overline{AB_1} - \overline{AB_1}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{AA_1} + \overline{BB_1}}{\overline{AB_1} + \overline{BA_1}} = \frac{\overline{AB_1} - \overline{BA_1}}{\overline{AA_1} - \overline{BB_1}}.$$

C. I. T.

Din triunghiurile dreptunghice ABA_1 şi ABB_1 , avem:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AA_1}^2 + \overline{BA_1}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{BB_1}^2,$$

de unde obţinem:

$$\overline{AA_1}^2 - \overline{AB_1}^2 = \overline{BB_1}^2 - \overline{BA_1}^2, \text{ deci:}$$

$$(\overline{AA_1} + \overline{AB_1})(\overline{AA_1} - \overline{AB_1}) = (\overline{BB_1} + \overline{BA_1})(\overline{BB_1} - \overline{BA_1})$$

şi împărţind cu

$$(\overline{AA_1} - \overline{AB_1})(\overline{BB_1} + \overline{BA_1})$$

avem prima egalitate.

$$\overline{AA_1^2} - \overline{BB_1^2} = \overline{AB_1^2} - \overline{BA_1^2}, \text{ deci:}$$

$$(\overline{AA_1} + \overline{BB_1}) (\overline{AA_1} - \overline{BB_1}) = (\overline{AB_1} + \overline{BA_1}) (\overline{AB_1} - \overline{BA_1})$$

apoi împărțim cu

$$(\overline{AA_1} - \overline{BB_1}) (\overline{AB_1} + \overline{BA_1}),$$

avem egalitatea a doua.

Clasa a V-a. Exerc. 984. *În triunghiul ABC fie D un punct pe latura BC, astfel ca $\angle CAD = \alpha$. Fie încă O centrul cercului circumscris și I centrul cercului ce trece prin A și este tangent în D la BC. Avem $\angle IAO = A - 2\alpha$.*

Soluție. Urmărim pe o figură

$$\angle IAC = \alpha - \angle ADI = \alpha - (90^\circ - \angle ADB) = \alpha - 90^\circ + C + \alpha = 2\alpha + C - 90^\circ;$$

$$\text{și } \angle OAC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle AOC = 90^\circ - B \text{ deci}$$

$$\angle OAI = \angle OAC - \angle IAC = 180^\circ - B - C - 2\alpha = A - 2\alpha.$$

Dacă AD este înălțime, $\angle OAI = C - B$.

Dacă AD este bisectoare interioară sau exterioară, cercul I este tangent cercului circumscris.

V. 985. *În triunghiul ABC să se ducă o paralelă la latura BC astfel ca aria trapezului format să fie jumătate din aria triunghiului inițial.*

Soluție. Insemnăm cu a latura BC cu h înălțimea corespunzătoare și cu x distanța paralelei căutate, de vârful A. Fie l , lungimea paralelei presupusă interioară. Ecuația problemei este

$$\frac{1}{2} (a + l) (h - x) = \frac{1}{4} ah, \quad l = \frac{ax}{h}. \text{ Rezultă } x = \pm \frac{1}{2} h \sqrt{2}.$$

Dacă paralela este sub baza BC, ecuația devine

$$\frac{1}{2} (a + l) (x - h) = \frac{1}{4} ah, \quad l = \frac{ax}{h}.$$

$$\text{De unde } x = \pm \frac{1}{2} h \sqrt{6}.$$

Soluțiile negative nu sunt acceptabile. Avem două drepte la distanțele $\frac{1}{2} h \sqrt{2}$ și $\frac{1}{2} h \sqrt{6}$ de vârful A.

Clasa a VI-a. Exerc. 1011. Fie R raza și O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și O' centrul cercului BOC .
Avem

$$\overline{OO'} = \frac{1}{2} R \sec A.$$

Soluție. Unghiul la centru BOC este dublul unghiului înscris A ; OO' este perpendiculară pe coarda comună BC , deci unghiul BOO' este cât A . Triunghiul $BO'O$ cu $\overline{O'O} = \overline{O'B}$ este isoscel; fie I mijlocul segmentului $BO = R$; avem

$$\overline{OI} = \overline{OO'} \cos A,$$

de unde rezultă relația cerută.

VI. 1012. În triunghiul ABC fie A', B', C' picioarele înălțimilor, M mijlocul laturii BC și α intersecția $BC, B'C'$.

Dacă însemnăm cu R raza cercului circumscris triunghiului, avem

$$\overline{\alpha A'} = R \frac{\sin 2B \sin 2C}{\sin (B - C)}, \quad \overline{\alpha M} = R \frac{\sin^2 A}{\sin (B - C)}.$$

Soluție. $B'C'$ fiind antiparalelă la BC , unghiul lor este

$$\sphericalangle B' \alpha B = \sphericalangle ABC - \sphericalangle AC' B' = B - C.$$

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul $\alpha BC'$; avem

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\sin C} = \frac{\overline{BC'}}{\sin (B - C)} = \frac{\overline{BC} \cos B}{\sin (B - C)} = \frac{2R \sin A \cos B}{\sin (B - C)}.$$

Atunci

$$\overline{\alpha A'} = \overline{\alpha B} + \overline{BA'} = \frac{2R \sin A \cos B \sin C}{\sin (B - C)} + 2R \sin C \cos B =$$

$$\frac{2R \sin C \cos B}{\sin (B - C)} [\sin (B + C) + \sin (B - C)] = \frac{4R \sin B \sin C \cos B \cos C}{\sin (B - C)}$$

și

$$\overline{\alpha M} = \frac{1}{2} (\overline{\alpha B} + \overline{\alpha C}) = \frac{R \sin A}{\sin (B - C)} (\sin C \cos B + \sin B \cos C) = \frac{R \sin^2 A}{\sin (B - C)}.$$

Altă soluție. Observăm că

$$\sphericalangle A'B'C' = 180^\circ - 2B, \overline{A'B'} = c \cos C = R \sin 2C$$

și aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul $\alpha A'B'$

$$\frac{\overline{\alpha A'}}{\sin(B-C)} = \frac{\overline{A'B'}}{\sin(B-C)} = \frac{R \sin 2B \sin 2C}{\sin(B-C)}$$

AA' este polara lui α față de cercul de diametru BC ; deci A' și α sunt puncte inverse față de acest cerc; atunci

$$\overline{M\alpha} \cdot \overline{MA'} = \left(\frac{1}{2} \overline{BC}\right)^2 \text{ însă } \overline{MA'} = R \sin(B-C)$$

de unde rezultă a doua relație.

**Până la 5 Decembrie 1947, am primit soluții la
exercițiile propuse în numerele 1, 2 și 3
vol. XIV, dela*):**

Liceul „Moise Nicoară”, Arad.

Clasa a VII-a: BĂBUȚIA C. I. (VII: 976*, 7, 8, 9, 81, 2*, 3, VIII: 908*); JUHAS P. P. (VII: 976*, 7, 8, 9, 80, 1, 2*, 3); PERNEVAN I. ST. (VII: 976*, 7, 8, 9, 81, 2, 3).

Liceul „Regele Ferdinand I”, Bacău.

Clasa a VI-a: BOCU C. M. (VI: 1027).

Clasa a VIII-a: STAIȚU C. D. (VIII: 906, 7, 10).

Liceul „Samuil Vulcan”, Beiuș-Bihor.

Clasa a V-a: DRAGOȘ N. L. (V: 1000, 1*, 2, 3*, 8, 9); MARIȘ I. D. (V: 1008, 9).

Clasa a VI-a: POPA I. E. (VI: 1019, 21, 6, 7, 8, VII: 982); ȘONCODI P. C. (VI: 1027, 8*).

Clasa a VII-a: BANCUI N. G. (VII: 977, 8, 9, 80, 2*, 3, 7, 8); BRISCAN C. M. (VII: 977, 80, 2*, 8, 9*, VIII: 906, 7, 8*); DIACONESCU C. C. (VII: 977, 89*, VII: 906, 8*); POPA I. I. (VII: 980, 8; VIII: 906, 7, 8*); ROIBU I. T. (VII: 988, 9, VIII: 906, 7, 8).

Clasa a VIII-a: GROSS A. T. (VIII: 915, 6, 7, 8, 9*, 20); DE SABATA I. (VIII: 906, 7, 8*, 9, 10, 3*, 4*, 5, 6, 7, 8, 9*).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa a VI-a: DIMA C. DIANA (VI: 1020, 7); ILIE C. RUXANDRA (VI: 1018, 9); PETCU A. LUCIA (VI: 1018*, 26, 30*, 1, VII: 977, 8, 81, 2).

Liceul „Domnița Ileana”, București.

Clasa a VII-a: VELCIU P. CONSTANTINA (VII: 989*, 91, VIII: 908*).

*) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și foarte îngrijit redactat.

Liceul de fete „Aurel Vlaicu“, București.

- Clasa a II-a:* DUMITRESCU MARIA (III: 337, 40); PIEPTĂNATU ELENA (III: 337).
Clasa a III-a: CUCU T. ELISABETA (III: 337, 40, 1*, VI: 828); PODBERESCHI P. ISABELA (III: 337); RUSSE F. MARIA (III: 337, 40, 1*, 2); SORCA V. GEORGETA (III: 337, 40, 1*, 2); STANCU I. ILEANA (III: 337, 40, 1*, 2); UDUBAȘA C. MARCELA (III: 337, 40, 1*, 2).
Clasa a IV-a: GEORGESCU M. MARIA (IV: 826, 7, 31, 2, V: 1014).
Clasa a VII-a: MARCU I. ALEXANDRINA (VII: 977, 83, 6*, 7, 8, 9, VIII: 906, 7, 8).

Institutul „Notre Dame de Sion“, București.

- Clasa a IV-a:* GHEORGHIU C. RUXANDRA (IV: 824).

Institutul „Moteanu“ București

- Clasa a VII-a:* FOTESCU C. LUCICA (VII: 976, 7, 9, 81).

Colegiul Național „Sf. Sava“, București.

- Clasa a VI-a:* SPĂTARU N. A. (VI: 1019, 21, 2, 7, 8, 30*, 1, 2, VII: 976*, 8, 82).
Clasa a VIII-a: CONSTANTINESCU G. V. (VIII: 906, 7, 9, 10, 7, 8, 20).

Liceul „Gheorghe Lazăr“, București.

- Clasa a VI-a:* CHIREA P. O. (VI: 1020).

Liceul „Matei Basarab“, București.

- Clasa a III-a:* FRĂȘIN C. R. (III: 339, 43*, 5); MĂCHITĂ P. G. (III: 339, 43*, 4*, 5).
Clasa a IV-a: LUMÂNARE V. F. (IV: 821, 4, 8*); POPESCU P. M. (IV: 822*, 4).
Clasa a V-a: BOTEZ V. M. (V: 1020); BREZOIANU D. (V: 1000, 1, 20); CRISTOVEANU I. D. (V: 1002, 3); DRĂGULESCU T. (V: 1020); GHIMBĂȘANU I. L. (V: 998*).
Clasa a VII-a: CAMIL E. S. (VII: 988, 9*, 90, 1, 2*, 3, 6*); GHIDIONESCU R. S. (VII: 992, 4, 5, 6*, 9*); IONESCU I. B. (VII: 987, 8*, 9*, 90, 1); IOVU A. M. (VII: 977, 8, 80, 1, 2, 3, 7, 8*, 9*, 91, VIII: 906, 7, 8*); LENZ N. FR. (VII: 990, 2*, 4*, 5*, 6*, 8, 9*); MARINEANU I. N. (VII: 988*, 90, VIII: 906); PĂUNESCU ST. G. (VII: 985*, 90, 1, 2*, 3, 4*, 5*, 6*, 7*, 9*, 1000*, E. G.: 802, 3*, 4*); POPESCU C. A. (VII: 977, 9, 81, 2, 8, 90, 1).
Clasa a VIII-a: TEODORESCU P. P. (E. G.: 803*, 4*, 5*).

Liceul „Mihai Viteazul“, București.

- Clasa a V-a:* ISTODOR C. V. (V: 999, 1001*, 2, 3*, 6, 7, 9, 11, 9).
Clasa a VI-a: CONSTANTINESCU I. V. (VI: 1019, 20*, 2, VII: 982, 3); DUMITRAȘCU I. C. (VI: 1020*, 1, 2, 7, 8*).
Clasa a VIII-a: PETCU A. V. (VIII: 906*, 7*, 8*, 10, 5, 6, 7, 8, E. G.: 796).

Liceul „Cantemir-Vodă“, București.

- Clasa a IV-a:* MINCU I. I. (IV: 821, 4, 7, 8*, V: 1009).
Clasa a V-a: APOSTOLESU I. V. (VII: 976*, 7, 8, 80, 2*, VIII: 908*).
Clasa a VII-a: IONESCU A. EM. (VII: 977, 8, 82, 8, 9, VIII: 908*).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

- Clasa a VI-a:* VISARION A. V. (VI: 1018*, 9, 21, 6, 30, 1, 2, 5, VII: 976*, 7, 8).

Liceul „Marele Voevod Mihai“, București.

- Clasa a V-a:* SCÂNTEE A. A. (V: 998*, 1001*, 2).
Clasa a VI-a: BRAȘOVEANU V. T. (VI: 1027); OPRESCU M. I. (VI: 1018*, 9, 20*, 1, 6, 7, 8*, 32, 4, 5, VII: 977, 8, 82).
Clasa a VII-a: LUCA M. C. (VII: 982, VIII: 906, 7, 8*), RADO E. A. (VII: 976*, 7, 8, 80, 1, 2, 3, VIII: 906, 7, 8);

Liceul „Gheorghe Șincai“, București.

Clasa a V-a: POPESCU V. D. (V: 998*, 1001*, 4*, 13*, E. G.: 801*, 2).

Clasa a VII-a: IONESCU G. D. (VII: 976*, 83, 7, 9*, VIII: 906, 7, 8*).

Liceul „Mihail Eminescu“, București

Clasa a VII-a: ANGHEL D. V. (VII: 983, 7, 8).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa a VIII-a: OLARU G. V. (VIII: 906, 7, 8, 9, E. G.: 796).

Liceul de Construcții Civile și Edilitare, București.

Clasa a VII-a: GHEORGHE Z. R. (VII: 978, 82*, 9*, VIII: 906, 7, 8).

Liceul „Profesorii Asociați“ București.

Clasa a IV-a: GUGUI C. D. (IV*: 826, 7, 8*, 9, VI: 1019, VII: 982*, 3).

Clasa a VIII-a: SOCACIU ȘT. (VIII: 919*).

Liceul „I. L. Caragiale“, București.

Clasa a V-a: GOLDSTEIN B. (V: 1007, 8, 9, VII: 982); ZAHARIA P. L. (V: 1002).

Liceul „M. Sebastian“, București.

Clasa a VII-a: KAMENITZER A. S. (VII: 976*, 8, 80, 2*, 7, 8, 9*, 90, 1, VIII: 906, 7, 8).

Liceul „B. P. Hașdeu“, Buzău.

Clasa a VI-a: MERIU C. G. (VI: 1019, 26, 7, 30*, 1, 2, 4, 5, 8, 9, VII: 976*, 8, 82).

Liceul „Știrbey Vodă“, Călărași.

Clasa a VII-a: IONESCU N. N. (VII: 977, 81, 2, 3, VIII: 906, 7).

Liceul „Dragoș-Vodă“, Câmpulung-Bucovina.

Clasa a VIII-a: GRIGOROVICI GR. I. (VIII: 917*, 8, 20, 1).

Liceul de fete, Câmpulung-Muscel.

Clasa a V-a: MILEA G. VIORICA (V: 1004*).

Liceul „Dinicu Golescu“, Câmpulung-Muscel.

Clasa a V-a: VIȘOIU A. GH. (V: 998*, 1007, 9).

Liceul „Ioniță Assan“, Caracal.

Clasa a VII-a: ANDREESCU GH. VL. (VII: 977, 8, 9*, 81, 2, 3, VIII: 906, 7, 8).

Liceul „Radu Negru“, Făgăraș.

Clasa a VIII-a: ROȘCA M. V. (VIII: 906, 7, 8, 9).

Liceul Internat „C. Negruzzi“, Iași.

Clasa a VIII-a: MURGESCU O. V. (VIII: 906, 7, 8*, 10, E. G.: 795, 8), TILICH C. M. (VIII: 906, 6, 8, 10).

Liceul „Em. Gojdiu“, Oradea Mare.

Clasa a V-a: BOROȘ V. V. (V: 998, 1008), FERCHE A. (V: 1007, 9), FOROSIGAN I. A. (V: 998, 1008), LEUCA F. V. (V: 1007, 9, E. G.: 802), MOLDOVAN T. T. (V: 998), NICOARĂ N. T. (V: 998, 1001, 2, 4*, 7, 8*), POPA GH. V. (V: 998, 1008).

Clasa a VI-a: CIOARA P. P. (VI: 919, 26, 7, VII: 977, 82, E. G.: 796), EDELSTEIN A. (VI: 1019, 26, 7), HĂTEGAN A. P. (VI: 1018, 20, 6, 7, 8, 9, 30, 1, VII: 976, 7, 8, 9, 82, 3, 7, 8, 9, VIII: 908, 10, E. G.: 800), LUCĂCIU G. O. (VI: 1018, 9, 20, 1*, VII: 982, 3, 7), NICA A. (VI: 1019, 20, 6, 7), SÂRBU C. M. (VI: 1019, 27, VII: 983), STOIA F. D. (VI: 1018, 9, 20, 7, 8, VII: 982, 3), ȘUTA I. M. (VI: 1022, 9, 31*, VII: 976, 9, 81*, 6, 8, 9, 91*, VIII: 906, 7, 8, 20, 1).

Clasa a VII-a: ARDELEANU GH. S. (VII: 977, 8, 80, 2, 7, 8, 9, VIII: 906, 7, 8), IOZSEF S. A. (VII: 987, 8, 9, VIII: 906, 7, 8), POPA I. P. (VII: 976*, 7*, 8*, 9, 80, 2, 3, 7, 8, 9, VIII: 906, 7, 8, E. G.: 795), STRACIUC A. O. (VII: 978, 80, 2, 7, 8, 9, VIII: 906, 8), TRIFA P. F. (VII: 977, 8, 80, 7, 8, 9, VIII: 908).

Clasa a VIII-a: BARBUL A. V. (VIII: 906, 7, 8, 9, 10, 1, 3).

Liceul „Alex. Roman“, Oradea-Mare.

Clasa a VII-a: ROSENBERG N. AL. (VII: 977, 81, 7, 8).

Liceul „Petru Rareș“, Piatra-Neamț.

Clasa a VI-a: ABRAMOVICI L. I. (VI: 1018, 9, 20, 6, 7, 8).

Clasa a VIII-a: ALMĂJANU I. L. (VIII: 906, 7, 8, 9, 16, E. G.: 800).

Liceul „I. C. Brătianu“, Pitești.

Clasa a VI-a: ANDRESCU C. S. (VI: 977, 1018, 9, 20, 2, 6, 7, 9).

Colegiul Militar „N. Filipescu“, Predeal.

Clasa a V-a: GHEORGHIU V. V. (V: 1002, 3, 4*, 6, 7, 8*, 9, 10, 1, 2, VI: 1019, 20, 1, 2, 6, 7, VII: 983, VIII: 921, E. G.: 796).

Clasa a VII-a: GEORGIAN N. N. (VII: 979, 87, 8, 9*, VIII: 906, 7, 8), MARCU D. V. (VII: 977, 8, 80, 2, 7, 8), IONESCU C. (VII: 907, 89).

Liceul „Regele Ferdinand I“, Râmnicu-Sărat.

Clasa a III-a: DĂNILĂ I. I. (III: 330, 7), MANUCĂ C. I. (III: 337*, 9*, 40, 1).

Clasa a IV-a: BADEA C. V. (IV: 822, 4), BARAC V. M. (IV: 824), NEGOCESCU ȘT. A. (IV: 828).

Clasa a V-a: MUNTEANU D. D. (V: 1002).

Clasa a VI-a: ASANACHE V. N. (VI: 1018, 20, 6, 7), BACIU I. M. (VI: 1020, 6, 7, 8), BOTEA D. V. (VI: 1018, 9*, 20, 6, 7, 8, 35, VII: 987), CERNAT AL. (VI: 1018, 9, 26, 7), CREȚU O. (VI: 1018*, 9, 20, 6, 7), CURSARU C. D. (VI: 1018*, 9, 20, 6, 7), DASCĂLU I. N. (VI: 1018*, 9, 20, 6, 7), DONESCU ȘT. I. (VII: 1018*, 9*, 20, 6, 7), DUȚĂ M. I. (VI: 1018*, 9*, 20, 6, 7), GĂZDARU G. P. (VII: 1018, 9, 20, 6, 7, 30), IONESCU S. M. (VI: 1018, 9, 26, 7, 8, 30, 1, 2), ȘERBAN T. E. (VI: 1018, 9, 26, 7), SLĂVOIU I. V. (VI: 1018*, 9, 20, 6, 7, 8), SURLARU T. (VI: 1018, 9, 20, 6, 7, 8, 35).

Clasa a VII-a: CRISTODOR V. V. (VII: 976, 82, 3, VIII: 906), VELEA M. E. (VI: 976, 83, 7, 8, 9, VII: 988, VIII: 906, 7).

Clasa a VIII-a: ÂNGHELACHE C. D. (VIII: 906, 7, 8, 9, 10, 1*, 3*), BRUCKENERES M. GH. (VIII: 906, 7, 8, 9*, 10, 1, 3), DINCĂ I. N. (VIII: 906, 7*, 8, 9*, 10*, 1*, 2, 7), NECULA D. A. (VIII: 906, 7, 8*, 9*, 10, 1*, 3*, 7*).

Liceul „Al. Lahovary“, Râmnicul-Vâlcea.

Clasa a VII-a: DOBRE N. V. (VII: 977, 8, 82, 8*, VIII: 906, 7).

Liceul „Principele Carol“ Sânnicolaul-Mare.

Clasa a V-a: WAGNER I. I. (VI: 1001, 2, VII: 977, 82).

Liceul „Mihail Eminescu“, Satu-Mare.

Clasa a VIII-a: CĂLINESCU G. E. (VIII: 906, 7*, 8*, 11, 20, 1).

Liceul de fete „Domnița Ileana“, Sibiu.

Clasa a IV-a: SAVOPOL C. DOINA (IV: 826*, 7*).

Liceul „Gh. Lazăr“, Sibiu.

Clasa a VI-a: LUPU V. C. (VI: 1018, 9, 26, VII: 982, 3), ROȘCA S. I. (VI: 1018, 9, 20, 6, 7, 8, VII: 982, 3), SCHLOMIUK H. N. (VI: 1018*, 9*, 21*, 2, 6, 7, 8, E. G.: 798, 800).

Liceul „Radu Greceanu“, Slatina-Olt.

Clasa a IV-a: NICULESCU C. M. (IV: 821, 2, 3, 4, V: 1009, 10), STROE C. I. (VI: 1026, 7, 8, 9).

Clasa a VII-a: ANDRONESCU N. L. (VII: 984, 6*, 7, VIII: 920* E. G.: 798, 800), CANTELI I. V. (VII: 978, 80, 1, 2, 3), CÂRSTEA I. D. (VII: 976*, 7*, 8, 9, 982, 3, VIII: 906, 7, E. G.: 795, 6), MARIN C. M. (VII: 778, 9, 80, 2, VIII: 906, 8), NEDEIANU I. G. (VII: 976), ȘERBESCU F. M. (VII: 980, 1, 2*, 3, 8*, 9).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa a VII-a: COSOROABĂ GH. V. (VII: 977, 90, 1, 808, 9, VIII: 906, 7, 8), DIJMĂRESCU I. D. (VII: 977, 8, 81, 2, 9, VIII: 906, 7), MREJA S. A. (VII: 977, 8, 80, 2, 9, VIII: 906, 7), NEGUȚ A. I. (VII: 979, 7, 8, 9*, 90, 1, VIII: 906, 7, 8, 20, 1, E. G.: 799, 800, 2), PĂȘANU C. I. (VII: 977, 8, 81, 2, 3, 9, 90), POENARU C. (VII: 988, 9*, VIII: 908*, 20), POPESCU V. I. (VII: 976, 7, 8, 81, 2, 3), PREOTEȘCU E. (VII: 977, 8, 1, 2, VIII: 902, 6, E. G.: 800), TOROPAN D. C. (VII: 977, 8, 82, 3).

Clasa a VIII-a: MOREGA V. T. (VIII: 906, 7, 8, 10, 5, 6, 7, 8*, 9*, 20, 1* E. G.: 796).

Liceul teoretic „Oituz“, Târgu-Ocna Bacău.

Clasa a VII-a: OLTEANU GR. N. (VII: 980, 1, 2).

Liceul „Papiu Ilarian“, Tg.-Mureș.

Clasa a VIII-a: OLTEANU L. (VIII: 906, 7, 8, 10*, E. G.: 792).

Liceul de fete din Turnu-Măgurele.

Clasa a VIII-a: DELCULESCU V. LENUȚA (VIII: 906, 7*, 15, 6).

Liceul „Sf. Haralambie“, Turnu-Măgurele.

Clasa a VII-a: CARACUDOVICI H. V. (VII: 976, 82, 3).

Liceul de fete „Carmen Sylva“, Timișoara.

Clasa a V-a: GÂRLEȘTEANU ELIZA (V: 1006, 8*, 9, 11*, VI: 1026, 7, VIII: 920).

Clasa a VII-a: BUSUIOC A. TEODORA (VII: 977, 8*, 81, 2), GÂDEANU M. OLGA (VII: 978*, 81, 2).

Clasa a VIII-a: FERTIG ȘT. MARGARETA (VIII: 916*).

Liceul Israelit de fete din Timișoara.

Clasa a VIII-a: ERDÖS D. ANA (VIII: 906, 7, 9, 10), HIRSCHL EVA (VIII: 906, 7, 9, 10).

Liceul Izraelit din Timișoara.

Clasa a VII-a: SAMUILĂ L. A. (VII: 976, 7, 8, 82, VIII: 906, 8).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa a V-a: ANDRECA N. ȘT. (V: 998, 1008*, 9), BĂGHINĂ V. A. (V: 998, 1002, 4*, 6*, 7, VI: 1027, VII: 982), IONESCU I. T. (V: 1003, VI: 1010, 1, 8, 9, E. G.: 802), ISVORANU V. V. (V: 1008), MITRICĂ C. GH. (V: 1008, 9), POPESCU V. M. (V: 1007, 8, 9, VI: 1011, 9*).

Clasa a VI-a: BOCĂRNEA C. I. (VI: 1018*, 9, 27, 8, 30, 1, 2, VII: 978, 82), STEGĂROIU P. (VI: 1019, 20, 2, 7), VINTILĂ I. GR. (VI: 1022, 7).

Clasa a VII-a: VĂGĂI C. ȘT. (VII: 977, 81, 2, 7, 9, VIII: 908).

EXERCITII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Aprilie 1948

Clasa a III-a. Exerc. 346. Un capital a fost desfăcut în două părți, astfel că una este triplul celeilalte și dat la dobândă: prima parte cu 5% pe 6 ani și a doua, cu 3% pe 2 ani; prima parte a adus cu 58,44 lei mai multă dobândă ca a doua. Care a fost capitalul?

III. 347. Cumpăr pere și mere pentru marmeladă și plătesc 6 lei kg de pere și 8 lei kg de mere. Am plătit 164 pe toată marfa și cantitățile de pere și mere cumpărate sunt proporționale cu numerele 7 și 5. Să se afle câte kilograme de pere și de mere am cumpărat.

E. M.

III. 348. Un comerciant începe o negustorie cu suma de 100.000 lei. După 2 ani și 5 luni își ia un asociat care are un capital cât $\frac{6}{5}$ din al său. Ei se despart după 5 ani și 6 luni realizând un câștig de 500.000 lei. Cât se cuvine fiecăruia?

H. D.

Clasa a IV-a. Exerc. 836. Să se arate că

$$(a-b)^2(1+c^2) + (b-c)^2(1+a^2) + (c-a)^2(1+b^2) + 2(1+ab)(1+bc)(1+ca) = 2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2).$$

C. I. Ț.

IV. 837. Dacă avem

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ avem și } \frac{a+c}{a+b+c+d} = \frac{a}{a+b} \quad \text{V. C.}$$

IV. 838. Să se efectueze

$$E = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \quad \text{N. M.}$$

IV. 839. Să se calculeze expresia

$$E = \frac{\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) \left(x - \frac{2x}{3x^2-1}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{3-x^2}\right)} \quad \text{I. I. S.}$$

IV. 840. Fie $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$, n drepte paralele situate într'un plan P și AB un segment în spațiu. Să se demonstreze că proiecțiile lui AB pe cele n drepte sunt egale. Dar dacă dreptele D_i sunt paralele în spațiu?

V. GH.

Clasa a V-a. Exerc. 1022. Să se arate că

$$(1+ab+a-b)^2(1+ab-a+b)^2 + 4(a-b)^2(1+ab)^2 = (1+a^2)^2(1+b^2)^2.$$

C. I. T.

V. 1023. Dacă avem $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$, atunci avem și

$$\frac{al+xm}{bl+ym} = \frac{ap+xq}{bp+yq}, \quad \frac{pa^2+qax+rx^2}{pb^2+qby+ry^2} = \frac{a^2+x^2}{b^2+y^2} \quad \text{V. C.}$$

V. 1024. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}} = 2 \sqrt{\frac{a}{x}} \quad \text{C. I. T.}$$

V. 1025. Să se rezolve ecuațiile

$$\frac{a+x}{a-1} + \frac{a-x}{a-3} = \frac{2a}{a-2}, \quad \frac{a+x}{a-2} + \frac{a-x}{a-4} = \frac{2a}{a-3}$$

și să se determine a , astfel ca rădăcina ecuației a doua să fie patratul rădăcinii primei ecuații.

E. M.

V. 1026. Se pune $P(x) = (x-1)^2$. Să se rezolve ecuația
 $P[P(x)] = 1$.

I. I. S

V. 1027. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$y+z+u=a, \quad z+u+x=b, \quad u+x+y=c, \quad x+y+z=d.$$

E. V.

V. 1028. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} cdy + bdz + bcu &= a^2, & adz + acu + cdx &= b^2, \\ abu + bdx + ady &= c^2, & bcx + acy + abz &= d^2. \end{aligned}$$

E. V.

V. 1029. A, B, C fiind trei puncte pe o dreaptă, în această ordine și $\overline{AB} < \overline{BC}$ să se determine poziția unui punct M între B și C, astfel ca

$$\overline{AM}^3 + \overline{BM}^3 + 3\overline{AM} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{MC} = \overline{MC}^3.$$

V. 1030. Un poligon convex are n laturi; diferența dintre suma a p unghiuri și suma unghiurilor exterioare celorlalte $n-p$ unghiuri este egală cu suma unghiurilor unui poligon convex de p laturi. Să se deducă de aici că suma a două unghiuri este egală cu suma unghiurilor exterioare celorlalte unghiuri. Caz particular $n=3$.

N. M.

Clasa a VI-a. Exerc. 1042. Dacă a, b, c, d sunt în progresie geometrică avem

$$\frac{a^2 - c^2 + ab + 2bc + bd - cd}{a^2 + c^2 - ab + 2ac - bd + cd} = \frac{a + b - c}{a - b + c}.$$

E. M.

VI. 1043. Să se verifice că

$$\sin^2 u \cos^6 u + \sin^4 u \cos^4 u + \sin^4 u \cos^2 u + \cos^2 u + \sin^4 u = 1.$$

N. M.

VI. 1044. Să se arate că

$$\text{dacă } \operatorname{tg} x = \sin 60^\circ, \text{ atunci } \cos 2x = \frac{1}{7};$$

$$\text{dacă } \operatorname{tgy} = \sin 45^\circ, \text{ atunci } \cos 2y = \frac{1}{3};$$

$$\text{dacă } \operatorname{tg} z = \sin 30^\circ, \text{ atunci } \cos 2z = \frac{3}{5}.$$

C. I. Ț.

VI. 1045. Dacă $x < 45^\circ$, atunci

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x + \dots = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x.$$

N. M.

VI. 1046. Să se verifice că

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(x+a) - \operatorname{tg} x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}(x+a) - \operatorname{ctg} x} = \operatorname{ctg} a.$$

N. M.

VI. 1047. Să se arate că dacă avem

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$$

avem și

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 2,$$

$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + 1 = 0,$$

$$\cos 4x + \cos 4y + \cos 4z = 8(\cos^4 x + \cos^4 y + \cos^4 z) - 5.$$

C. I. Ț.

VI. 1048. Să se arate că

$$\frac{1 + \cos 2a + i \sin 2a}{\cos a + i \sin a} = 2 \cos a,$$

$$\frac{1 - (\cos 2a + i \sin 2a)}{1 + \cos 2a + i \sin 2a} + i \operatorname{tg} a = 0;$$

în relația a doua, $i^2 = -1$.

C. I. Ț.

VI. 1049. Să se calculeze unghiurile u , date de formula

$$\operatorname{tg}^3 5u = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{ctg}^2 a}{1 + \operatorname{ctg}^2 a}}$$

și cuprinse între 0° și 360° , știind că $\angle a = 124^\circ 20' 35''$.

V. GH.

VI. 1050. In vârfurile A, B, C, D ale unui paralelogram ducem perpendicularele AA', BB', CC', DD' pe planul figurii; dacă A'C' și B'D' se întâlnesc avem

$$\overline{AA'} + \overline{CC'} = \overline{BB'} + \overline{DD'};$$

atunci A'B'C'D' este și el un paralelogram.

Clasa a VII-a. Exerc. 1001. Să se rezolve ecuația

$$39 C_{x-1}^4 = 10 C_{x+1}^5.$$

N. M.

VII. 1002. Să se rezolve ecuația

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 x & 1 & \operatorname{cotg}^2 x \\ \operatorname{cotg}^2 x & \operatorname{tg}^2 x & 1 \\ 1 & \operatorname{cotg}^2 x & \operatorname{tg}^2 x \end{vmatrix} = 0.$$

E. M.

VII. 1003. Să se discute sistemul

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 1, \quad x \cos \alpha - y \sin \alpha = \cos \varphi,$$

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \varphi.$$

N. M.

VII. 1004. Dacă

$$f(\cos x) = g\left(\cotg \frac{x}{2}\right)$$

să se arate că

$$g(\cos x) = f\left(-\frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}\right).$$

C. I. T.

VII. 1005. Să se afle valoarea fracției

$$\frac{a^2 x^2 (x + a) - x^5 - a^5}{ax (x^2 + a^2) - x^4 - a^4}$$

pentru $x = a$.

I. I. S.

VII. 1006. Să se determine valorile parametrilor α, β astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4\alpha - 3\beta + 8) x^{\alpha+\beta+13} - 3x^2 + 11}{(3\alpha - 4\beta + 4) x^{2\alpha-3\beta+3} + 2x - 31} = 0,9.$$

V. GH.

VII. 1007. Să se calculeze

$$E_1 = \lim_{x \rightarrow \frac{b}{a}} \frac{a^2 x^2 - b^2}{ax - \sqrt{a^2 x^2 - abx + b^2}},$$

$$E_2 = \lim_{x \rightarrow \frac{a}{b}} \frac{b^2 x^2 - a^2}{bx - \sqrt{b^2 x^2 - abx + a^2}},$$

$$E_3 = \lim_{x \rightarrow \frac{a}{b}} \frac{b^2 x^2 - a^2}{bx - \sqrt{b^2 x^2 - b^2 x + ab}}$$

și să se determine a și b astfel ca E_1, E_2, E_3 să fie în progresie geometrică, iar E_2, E_1, E_3 să fie în progresie aritmetică.

E. M.

VII. 1008. Să se afle adevărata valoare a expresiunii

$$E = \frac{n \sin (2n+1)x}{\sin x} - \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}$$

pentru $x = 0$.

C. I. Ț.

VII. 1009. Limita expresiei

$$y = \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\sin a}}{\sin \sqrt{x} - \sin \sqrt{a}},$$

când $x \rightarrow a$. (Fără regula lui HÔPITAL).

V. C.

VII. 1010. Limita expresiei

$$y = \frac{\sqrt{\sin (2x+1)} - \sqrt{\sin (x+2)}}{\operatorname{tg} (x-1)},$$

când $x \rightarrow 1$. (Fără regula lui HÔPITAL).

V. C.

Clasa a VIII-a. Exerc. 931. Fie dreptele

$$D_1 \equiv 2x - y = 0, \quad D_2 \equiv x - 3y = 0.$$

Pe dreapta D_1 se ia punctul A astfel ca $OA = 2\text{cm}$; se construiește patratul de latură OA și având pe D_2 ca diagonală. Să se afle coordonatele vârfurilor patratului.

E. M.

VIII. 932. Fie ABC un triunghi oarecare și AD, BE, CF cele trei înălțimi ale lui. Fie M un punct oarecare pe AD , iar N și P proiecțiile lui pe AC și AB . Se înseamnă cu A', A'' mijloacele lui EF și NP . Punctele A, A', A'' sunt colineare. (Soluție analitică).

V. C.

VIII. 933. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC . Avem

$$\cos A = \frac{AH^2}{AB \cdot AC - BH \cdot CH}$$

N. M.

VIII. 934. Să se afle regiunea punctelor din plan, pentru care avem

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x - y} \geq 0;$$

apoi să se reprezinte cercul

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{x - y} = 4.$$

C. I. T.

VIII. 935. Se dau punctele $A(2, 3)$ și $B(3, 2)$ și se cere:

a) Să se scrie ecuația cercului care trece prin originea axelor și prin punctele A și B .

b) Să se afle ecuațiile tangentelor la cercul de mai sus în punctele A și B precum și coordonatele punctului C de intersecție a acestor două tangente.

c) O dreaptă mobilă dusă prin C taie dreapta AB în M . Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului CM .

E. V.

VIII. 936. Fie punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 1)$ și dreptele AC și BC perpendiculare. Fie apoi P și Q respectiv proiecțiile lui C pe axele Ox și Oy . Se cere:

1°. Locul geometric al intersecției dreptelor PQ și OC .

2°. În ce caz dreptele AB , PQ și OC sunt concurente?

E. M.

VIII. 937. 1°. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor

$$x^2 + y^2 + (\lambda - 5)x - (\lambda + 1)y + \lambda = 0,$$

când λ variază.

2°. Fascicolul

$$x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y + 1 - 3\lambda = 0$$

are două cercuri de rază nulă; să se arate că orice cerc din acest fascicol este ortogonal unui cerc din fascicolul dela 1°.

N. M.

VIII. 938. Se dă ecuația

$$(m-1)x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt x_1 și x_2 . Să se determine m așa fel ca punctele de abscise x_1 și x_2 să fie conjugate armonic cu punctele de abscise m și $m-2$.

I. I. S.

VIII. 939. Fie ecuația

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Să se arate că

$$r(p-r+2x_2) - 2x_1x_3 + q = 1 - (x_1x_2 - 1)(x_2x_3 - 1)(x_1x_3 + 1)$$

C. I. T.

VIII. 940. Se dă o placă triunghiulară ABC, echilaterală, de latură l . Din această placă să se decupeze o porțiune în formă de triunghi isoscel ABD ($\overline{AD} = \overline{BD}$), astfel încât porțiunea ADBC care rămâne să aibă centrul de greutate chiar în D.

G. T.

Exerciții Generale. Exerc. 811. Se știe că polinomul $x^2 - x + 11$ dă un număr nelimitat de numere prime pentru șirul valorilor lui x întregi, pozitive sau negative.

Să se demonstreze că pentru fiecare număr prim obținut, polinomul considerat dă asemenea un șir nelimitat de multipli ai acestui număr prim.

Să se deducă apoi un procedeu de eliminare, din șirul natural al numerelor întregi, a valorilor lui x pentru care polinomul considerat dă numere neprime (compuse).

O. N. T.

E. G. 812. Să se arate că dacă a^2 se divide prin $a+b$ atunci și b^2 se divide prin $a+b$.

GH. B.

E. G. 813. Dacă d este un divizor al lui p , atunci

$$N = a^p - 1$$

se divide neapărat prin $a^d - 1$.

GH. B.

E. G. 814. Să se găsească numerele $abba$ și $baab$, astfel încât indicatorul mediei lor aritmetice să fie un cub perfect

V. GH.

E. G. 815. Să se rezolve sistemul

$$\frac{bz - cy}{a + x} = \frac{cx - az}{b + y} = \frac{ay - bx}{c + z}, \quad mx + ny + pz = d.$$

I. I. S.

E. G. 816. Să se arate că dacă avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p \sin \beta}{1 - p \cos \beta}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{q \sin \alpha}{1 - q \cos \alpha}$$

atunci rezultă că

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{p}{q}.$$

V. C.

E. G. 817. Dacă notăm $ns = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, expresia

$$E = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 - 3 \sum a_1 a_2 a_3$$

nu își schimbă valoarea când înlocuim pe $a_1, a_2, \dots, a_n$ respectiv cu $s - a_1, s - a_2, \dots, s - a_n$.

M. I. A.

E. G. 818. Să se discute sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} x - y - w &= 0, & u - v &= (a - b)(1 - c), \\ y - z - u &= 0, & v - w &= (b - c)(1 - a), \\ z - x - v &= 0, & w - u &= (c - a)(1 - b). \end{aligned}$$

C. I. Ț.

E. G. 819. Notăm $s_k = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$; să se verifice că $|s_1 - a_1 \quad s_2 - a_1^2 \quad \dots \quad s_n - a_1^n| = (-1)^{n-1} (n-1) a_1 a_2 \dots a_n V_n$, unde prima parte este un determinant ale cărui linii se obțin pentru $i = 1, 2, \dots, n$ iar V_n este determinantul VANDERMONDE al cantităților $a_1, a_2, \dots, a_n$.

N. M.

E. G. 820. Să se calculeze

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^4 - 6x^2 + 1} dx \quad \text{și} \quad \int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^4 - 6x^2 + 1} dx.$$

C. I. Ț.

INSTRUCȚIUNI

Pentru redactarea și trimiterea soluțiilor exercițiilor publicate în *Gazeta Matematică Supliment cu exerciții* se vor avea în vedere *Instrucțiunile* publicate în primele două numere.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca Societății „Gazeta Matematică” au apărut și se găsesc următoarele:

XI. *Gazeta Matematică* 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) Lei 100

XIII. I. Ionescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică*. Partea I. Aritmetică rațională Lei 500

XIX. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie*. Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăugită de G-ralul Gh. I. Liteanu. Lei 150

XX. I. I. Chițulescu, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă*. Partea I Lei 180

XXI. M. Ghermănescu, *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* Lei 500

XXII. G. Țițeica, *Culegere de Probleme de analitică*. Ediția II. Partea II adăugită de N. G. Botea și C. Ionescu-Bujor Lei 250

XXIII. *Gazeta Matematică* 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învățăminte. Volum jubilar (288 pag.) Lei 100

XXIV. A. G. Ioachimescu, *Mecanică rațională*, Curs predat la Școala Politehnică din București. revăzut și adăugit după îndrumările autorului, de Gabriela Țițeica și Al. Stoenescu Lei 1.500

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

I. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile I—VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 320

II. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 400

III. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPsicLE și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 200

Biblioteca Tehnică a „GAZETEI MATEMATICE”

(Tipărită din fondul Anghel Saligny)

I. Ion Ionescu, *Beton armat. Expunerea elementară a regulilor de construcțiune și a principiilor de calcul*. (Ediția II-a) Lei 100

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA”

I. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice* Lei 250

Pentru biblioteci și autorități toate prețurile se triplează.

Pentru volumele din Colecția și Bibliotecile din „Gazeta Matematică” de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preț pentru taxele de expediție.

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an.

Pentru vol. LIII abonamentele sunt:

Pentru profesori, studenți și elevi Lei 480

Pentru autorități și biblioteci Lei 1.500

8773

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL XIV. No. 9

1 Iunie 1948

9693

SOCIETATEA GAZETA MATEMATICĂ
CALEA GRIVIȚEI, 158. BUCUREȘTI 2. — TELEFON 7-3803

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL XIV. No. 9

1 Iunie 1948

Apariția numărului 1 Anul XV va fi la 1 Oct. 1948

ABONAMENTUL LEI 360 PE AN (9 numere)

Soluții și orice corespondență pe adresa: ING. C. IONESCU-ȚIU
Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

REDACȚIA S. E. G. M. ANUL XIV

Pentru exerciții propuse: MIRCEA ADAM (M. I. A.); B. I. BARBĂLAT (B. B.); G. BUICLIU (Gh. B.); VIRGIL CLAUDIAN (V. C.); HRISTACHE DĂSCĂLESCU (H. D.); AURELIAN IACOVACHE (A. N. I.); C. IONESCU-BUJOR (C. I. B.); C. IONESCU-ȚIU (C. I. Ț.); VIRGIL GHÎȚESCU (V. Gh.); EMILIAN MEREUȚĂ (E. M.); N. N. MIHĂILEANU (N. M.); I. I. STAMATE (I. I. S.); G. D. SIMIONESCU (G. D. S.); GABRIELA ȚITEICA (G. Ț.); OVIDIU ȚINO (O. N. Ț.); EUGEN VIȘA (E. V.).

Pentru corectarea soluțiilor elevilor: N. N. MIHĂILEANU (liceele din orașele cu inițialele (A—B); ANA IOAN (idem, C—M); C. IONESCU-ȚIU (idem, O—Z).

Coordonarea materialului, redactarea exercițiilor rezolvate, clasificarea corespondențelor și corecturi: N. N. MIHĂILEANU.

CONSIDERAȚII ALGEBRICE ȘI TRIGONOMETRICE ASUPRA TRIUNGHIULUI

1. Triunghiul este o figură plană cu forma bine determinată prin două unghiuri, al treilea rezultă, suma lor fiind două unghiuri drepte, deci cel mult unul obtus. Cu două numere care să caracterizeze unghiurile, putem exprima diferite elemente ale unui triunghi *tip*, ale cărui elemente sunt proporționale cu elementele metrice respective ale oricărui triunghi de aceeași formă. Astfel, notăm

$$\operatorname{tg} A = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha \text{ și } \operatorname{tg} B = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \beta \text{ și rezultă } \operatorname{tg} C = -\operatorname{tg} (A+B) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta - 1}.$$

Deasemenea avem:

$$\sin A = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \sin B = \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \cos A = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \cos B = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\sin C = \sin (A+B) = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}}, \cos C = \frac{\alpha\beta - 1}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}}.$$

Laturile a, b, c ale unui triunghi fiind proporționale cu $\sin A, \sin B, \sin C$, putem considera triunghiul tip cu următoarele elemente:

$$a = \alpha \sqrt{1 + \beta^2}; b = \beta \sqrt{1 + \alpha^2}; c = \alpha + \beta; R = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \alpha^2)(1 + \beta^2)};$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \alpha \beta (\alpha + \beta); h_a = \frac{(\alpha + \beta) \beta}{\sqrt{1 + \beta^2}};$$

$$h_b = \frac{(\alpha + \beta) \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}; h_c = \alpha \beta.$$

Dacă se dau laturile a_k, b_k, c_k , ale unui triunghi oarecare, pentru a trece la triunghiul tip corespunzător folosim relațiile

$$\cos A = \frac{b_k^2 + c_k^2 - a_k^2}{2b_k c_k} = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \text{ etc. ...}$$

$$\text{sau } \operatorname{tg} A = \frac{2S_k}{p_k(b_k + c_k - a_k) - b_k c_k} = \alpha,$$

$$\text{sau } \sin A = \frac{2S_k}{b_k c_k} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \text{ și analoagele pentru determinarea lui } \beta;$$

iar coeficientul de proporționalitate este $k = \frac{a_k}{a} = \frac{b_k}{b} = \frac{c_k}{c}$, și

$$S_k = k^2 S, \text{ unde } k = a \cotg A \cos B.$$

Cu notațiile făcute $\operatorname{tg} A = \alpha$ și $\operatorname{tg} B = \beta$ de unde rezultă $\operatorname{tg} C = \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta - 1} = \gamma$, adică $\alpha + \beta + \gamma = \alpha \beta \gamma$, din relații trigonometrice

obținem relații și identități algebrice; ca exemple avem propuse în S. G. M. exerc. IV: 826, 32, 3, 6, 41, 6, 52, V: 998, 1008, 22, 43, E. G.: 833; în G. M. problema 6426 și în R. M. T. problema 2556 și 2588.

Dacă luăm triunghiul tip, triunghiul cu laturile $a = \sin A$, $b = \sin B$, avem $c = \sin C = \sin(A + B) = a \sqrt{1 - b^2} + b \sqrt{1 - a^2}$; iar expresiile elementelor tip rezultă,

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{1}{2}; S = \frac{abc}{2}; h_a = \frac{2S}{a} = bc, h_b = ac, h_c = ab, \dots$$

Pentru transformare avem $k = 2R$.

2. Pentru a nu avea inconvenientul de a exprima irațional latura triunghiului tip în funcție de cele două numere care caracterizează forma și pentru a nu avea lipsă de precizie asupra semnului radicalului care exprimă cosinusul sau tangenta, să notăm

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{m_1}{m_2} = m; \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{n_1}{n_2} = n,$$

unde m și n sunt reale și pozitive, astfel ca să avem :

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \operatorname{cotg} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \frac{1 - mn}{m + n} \geq 0, \text{ adică } mn \leq 1.$$

Mai rezultă că dacă m sau n este supraunitar, unghiul corespunzător este obtus; iar cazul când m și n sunt pozitive subunitare, unghiul C este obtus dacă $\frac{1 - mn}{m + n} > 1$, adică $m + n + mn < 1$ și condiția ca toate unghiurile să fie ascuțite este ca m și n să fie subunitare și $m + n + mn > 1$. Mai avem :

$$\sin A = \frac{2m}{1 + m^2}; \sin B = \frac{2n}{1 + n^2};$$

$$\cos A = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}; \cos B = \frac{1 - n^2}{1 + n^2}; \sin C = \frac{2(m + n)(1 - mn)}{(1 + m^2)(1 + n^2)},$$

$$\cos C = \frac{4mn - (1 - m^2)(1 - n^2)}{(1 + m^2)(1 + n^2)}; \operatorname{tg} A = \frac{2m}{1 - m^2}; \operatorname{tg} B = \frac{2n}{1 - n^2};$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{2(m + n)(1 - mn)}{(m + n)^2 - (1 - mn)^2}.$$

Dacă ținem seama de expresia lui $\operatorname{tg} C$ și de condițiile de variație ale lui m și n când unghiul C este ascuțit, deducem că dacă punctul $M(x, y)$ se mișcă în domeniul din cadranul pozitiv, mărginit de axele Ox, Oy , iperbola $xy = 1$ și iperbola $x + y + xy = 1$; funcția $Z = \frac{(x + y)(1 - xy)}{(x + y)^2 - (1 - xy)^2}$ are domeniul de variație dela zero la infinit și este zero dacă punctul M este pe iperbola $xy = 1$ și infinit dacă M este pe iperbola $x + y + xy = 1$.

Pentru jumătăți de unghiuri avem:

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}; \quad \sin \frac{B}{2} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \\ \sin \frac{C}{2} &= \frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}; \quad \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}; \\ \cos \frac{B}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}; \quad \cos \frac{C}{2} = \frac{m+n}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}},\end{aligned}$$

unde toți radicalii au semnul plus.

3. Se observă că expresiile

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad \text{și} \quad \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

sunt raționale, precum și rapoartele trigonometrice ale unghiurilor multipli de A, B, C. Bisectoarele triunghiului, care se exprimă în funcție de sinusul sau cosinusul jumătăților de unghiuri pot fi și ele raționale dacă expresiile $\sqrt{1+m^2}$ și $\sqrt{1+n^2}$ sunt numere

raționale. Cantitatea $\sqrt{1+m^2}$ ca să fie rațională, notând $m = \frac{m_1}{m_2}$,

unde m_1 și m_2 sunt întregi, este necesar ca $m_1^2 + m_2^2$ să fie pătrat perfect, ori aceasta este posibil dacă avem $m_1 = p_1^2 - q_1^2$ și $m_2 = 2p_1q_1$, unde $p_1 > q_1$ (m fiind pozitiv). Astfel mai notăm $n = \frac{p_2^2 - q_2^2}{2p_2q_2}$, și urmând calcule analoage, rezultă pentru raza

cercului circumscris triunghiului tip expresia $R = \frac{1}{8} (p_1^2 + q_1^2)^2 (p_2^2 + q_2^2)^2$

și condiția $p_1q_2 + p_2q_1 > p_1p_2 - q_1q_2$ care rezultă din inegalitatea $\sin C > 0$. În cazul inițial când am notat $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = m$, etc., putem

considera ca elemente ale triunghiului tip, astfel:

$$\begin{aligned}a &= m(1+n^2); \quad b = n(1+m^2); \quad c = (m+n)(1-mn); \\ p &= m+n; \quad R = \frac{1}{4} (1+m^2)(1+n^2); \quad S = mn(m+n)(1-mn); \\ r &= mn(1-mn); \quad r_a = m(m+n); \quad r_b = n(m+n); \quad r_c = 1-mn; \\ h_a &= 2n(m+n)(1-mn):(1+m^2); \\ h_b &= 2m(m+n)(1-mn):(1+n^2); \quad h_c = 2mn, \dots\end{aligned}$$

4. Este de observat că trecerea dela un triunghi oarecare la triunghiul său tip și apoi revenirea la elementele triunghiului inițial se face cu ajutorul coeficientului k de transformare, pentru al cărui calcul voi da exemplele ce urmează.

Din cauză că laturile triunghiului tip sunt date în funcție de 2 parametri m și n , sau în funcție de trei parametri m, n, p , însă legați prin relația $mn + np + pm = 1$, rezultă că triunghiul tip va avea laturile legate printr'o relație care poate fi un rezultat al eliminării parametrilor. În cazul când trecerea dela un triunghi dat la triunghiul tip transformă triunghiul în el însuși avem $k=1$, deci

$$k = a \cotg \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} = 1.$$

Fiind date laturile a, b, c ale unui triunghi, numerele m și n sunt $m = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{(b+c)^2 - a^2}}$; $n = \sqrt{\frac{b^2 - (c-a)^2}{(c+a)^2 - b^2}}$.

Dacă se dau 2 laturi și R raza cercului circumscris, folosim relația $\tg \frac{A}{2} = \operatorname{cosec} A - \cotg A$ și avem $m = \frac{2R}{a} - \sqrt{\left(\frac{2R}{a}\right)^2 - 1}$ m și n fiind calculate rezultă toate elementele triunghiului tip. Trecerea dela triunghiul tip la triunghiul inițial se face calculând coeficientul de proporționalitate k .

Fie a, b, c laturile triunghiului inițial și a_1, b_1, c_1 laturile triunghiului tip, avem :

$$a_1 = m(1 + n^2) = \frac{ac\sqrt{p-c}}{p\sqrt{p(p-a)(p-b)}} = \frac{a}{k},$$

deci

$$k = \frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)}}{c\sqrt{p-c}},$$

ceea ce mai arată că coeficientul k are dimensiune lungimea; iar a_1, b_1, c_1 numere fără dimensiuni, iar pentru $k=1$ triunghiul tip se transformă în el însuși, de unde rezultă relația între laturile triunghiului tip, adică rezultatul eliminării lui m și n din relațiile $a = m(1 + n^2)$; $b = n(1 + m^2)$; $c = (m + n)(1 - mn)$ este $k=1$ sau dezvoltând avem :

$$(a + b + c) \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)} = 4c\sqrt{a+b-c}.$$

5. Cu ajutorul numerelor m și n transformăm relațiile și inegalitățile trigonometrice în altele algebrice; iar condițiile impuse, permit să impunem anumite condițiuni coeficienților unor ecuații algebrice cu rădăcini pozitive.

Exemple. Relația:

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

devine:

$$\frac{m^2}{1+m^2} + \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{(1-mn)^2}{(1+m^2)(1+n^2)} = 1 - \frac{2mn(1-mn)}{(1+m^2)(1+n^2)},$$

unde $0 \leq mn \leq 1$, sau

$$\frac{m^2}{1+m^2} + \frac{n^2}{1+n^2} + \frac{p^2}{1+p^2} = 1 - \frac{2mnp}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)(1+p^2)}},$$

unde am notat

$$p = \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1-mn}{m+n}, \text{ adică avem: } mn + np + pm = 1.$$

În aceleași condițiuni inegalitatea $9R^2 \geq a^2 + b^2 + c^2$, devine

$$9(1+m^2)^2(1+n^2)^2(1+p^2)^2 \geq 16 \sum [m^2(1+n^2)^2(1+p^2)^2],$$

sau
$$\frac{9}{16} \geq \frac{m^2}{(1+m^2)^2} + \frac{n^2}{(1+n^2)^2} + \frac{p^2}{(1+p^2)^2} = \sum \left(m + \frac{1}{m} \right)^{-2}$$

Observăm că dacă schimbăm numerele m, n, p cu inversele lor, condiția devine $mn + np + pm = 1$ și inegalitatea precedentă

$$\frac{9}{16} \geq \sum \left(m + \frac{1}{m} \right)^{-2} \text{ se menține; iar egalitatea devine}$$

$$\sum \frac{1}{1+m^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)(1+p^2)}}, \text{ unde } m+n+p = mnp.$$

Din relația cunoscută $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$ obținem relația

$$\frac{m}{1-m^2} + \frac{n}{1-n^2} + \frac{p}{1-p^2} = \frac{4mnp}{(1-m^2)(1-n^2)(1-p^2)}, \text{ unde } mn + np + pm = 1, \text{ sau } m+n+p = mnp.$$

$$\text{Inegalitatea } \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq 9 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

devine $m+n+p \geq 9mnp$, unde $mn + np + pm = 1$.

Deasemenea avem: $mn + np + pm \geq 9$, unde $m+n+p = mnp$.

Sub altă formă enunțăm astfel: ecuația $x^3 - \alpha x^2 + x - \beta = 0$ cu rădăcini pozitive, impune condiția $0 \leq 9\beta \leq \alpha$; iar ecuația $\alpha x^3 - x^2 + \beta x - 1 = 0$, cu rădăcini pozitive impune condiția $\frac{\beta}{\alpha} \geq 9$.

6. În triunghiul tip ABC cu laturile $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, unde $k = 2R = 1$, $\overline{AA_1}$ fiind diametrul cercului circumscris, avem $\overline{A_1C} = \cos B$; $\overline{A_1B} = \cos C$; iar relația $a = b \cos C + c \cos B$, devine $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin(B + C)$; aceeași expresie ia relația $\overline{AA_1} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BA_1} + \overline{AB} \cdot \overline{CA_1}$.

În triunghiul A_1BC , relația $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, devine $\sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C - 2 \cos B \cos C \cos(180 - A)$, sau $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.

Dacă notăm cu B_1 și C_1 simetricele lui B și C față de O , cu A_2 , B_2 , C_2 intersecțiile înălțimilor cu cercul circumscris și cu A_3 , B_3 , C_3 simetricele punctelor A_2 , B_2 , C_2 față de O , observăm că avem:

$$\sin A = \overline{BC} = \overline{B_1C_1} = \overline{AB_3} = \overline{CA_3} = \overline{A_1B_2} = \overline{A_1C_2}; \text{ etc...}$$

$$\cos A = \overline{CB_1} = \overline{BC_1} = \overline{A_1B_3} = \overline{A_1C_3} = \overline{AB_2} = \overline{AC_2}; \text{ etc...}$$

deasemenea avem:

$$|\sin(A - B)| = \overline{C_1C_2} = \overline{CC_3}; \quad |\cos(A - B)| = \overline{C_1C_3} = \overline{CC_2}; \dots$$

$$|\sin 2A| = \overline{B_2C_2} = \overline{B_3C_3}; \quad |\cos 2A| = \overline{B_2C_3} = \overline{B_3C_2};$$

și analoagele lor.

Din acestea, deducem că se pot construi triunghiuri care să aibă ca laturi valoarea absolută a expresiilor:

$$\sin 2A, \sin 2B, \sin 2C; \quad \cos A, \cos B, \sin(A \pm B);$$

$$\cos A, \cos 2C, \sin(B - C); \quad \cos A, \cos(C - A), \sin C;$$

$$\sin 2A, \cos 2B, \cos 2C; \quad \cos A, \sin A, \cos 2A;$$

$$\sin A, \cos(B - C), \cos 2C, \quad \cos \frac{A}{2}, \cos \frac{B}{2}, \cos \frac{C}{2}, \text{ etc...}$$

În triunghiul $A_2B_2C_2$, relația: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, devine:

$$\sin^2 2A = \sin^2 2B + \sin^2 2C + 2 \sin 2B \sin 2C \cos 2A;$$

iar în triunghiul AB_2C_2 , cu laturile $\cos A$, $\cos A$, $\sin 2A$ obținem $\sin^2 2A = \cos^2 A + \cos^2 A - 2 \cos^2 A \cos 2A = 2 \cos^2 A (1 - \cos 2A)$.

C. IONESCU-ȚIU.

EXERCITII REZOLVATE

Clasa a V-a. Exerc. 1024. Să se arate că

$$\frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}} = 2 \sqrt{\frac{a}{x}}. \quad \text{C. I. Ț.}$$

Soluție ¹⁾. Amplificăm fracția a doua cu conjugata numitorului

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{a} \mp \sqrt{a-x})}{x} \\ &= \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{a-x}}{\sqrt{x}} = 2 \sqrt{\frac{a}{x}}. \end{aligned}$$

V. 1030. Un poligon convex are n laturi; diferența dintre suma a p unghiuri și suma unghiurilor exterioare celorlalte $n-p$ unghiuri este egală cu suma unghiurilor unui poligon convex de p laturi. N. M.

Soluție ²⁾. Suma unghiurilor unui poligon convex de n laturi este $2(n-2)$ unghiuri drepte, iar unghiul exterior al unui unghi u este $2-u$, luând ca unitate de măsură, unghiul drept. Fie atunci $u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n$ unghiurile poligonului dat. Avem atunci, după enunț:

$$\begin{aligned} & u_1 + u_2 + \dots + u_p - [(2-u_{p+1}) + (2-u_{p+2}) + \dots + (2-u_n)] \\ &= u_1 + u_2 + \dots + u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n - 2(n-p) \\ &= 2(n-2) - 2(n-p) = 2(p-2), \end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru $p=2$ deducem că suma a două unghiuri este egală cu suma unghiurilor exterioare celorlalte unghiuri și în particular, într'un triunghi, teorema unghiului exterior.

Clasa a VI-a. Exerc. 1042. Dacă a, b, c, d sunt în progresie geometrică avem

$$\frac{a^2 - c^2 + ab + 2bc + bd - cd}{a^2 + c^2 - ab + 2ac - bd + cd} = \frac{a + b - c}{a - b + c}.$$

E. M.

1) Dată de d-l GABRIEL STROESCU — Târgu-Jiu.

2) Soluție dată de d-l VALENTIN C. ISTODOR, Liceul Mihai Viteazul, București.

*Soluție*¹⁾. Aplicăm proprietatea proporției: dacă

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{t} \quad \text{atunci} \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{z+t}{z-t}$$

și obținem
$$\frac{a^2 + bc + ac}{ab + bc - ac + bd - cd - c^2} = \frac{a}{b - c}$$

sau
$$\frac{a^2 + bc + ac}{a + c + d} = a$$

ceea ce revine la $ad = bc$. În concluzie, dacă a, b, c, d sunt în progresie geometrică, relația este verificată; dar necesară este numai condiția $ad = bc$, care lasă mai multă libertate literelor.

Clasa a VIII-a. Exerc. 940. Se dă o placă triunghiulară ABC, echilaterală, de latură 1. Din această placă să se decupeze o porțiune în formă de triunghi isoscel ABD ($\overline{AD} = \overline{BD}$), astfel încât porțiunea ADBC care rămâne să aibă centrul de greutate chiar în D.

G. Ț.

Soluție. Rezolvăm problema, în cazul ceva mai general, al unui triunghi ABC isoscel ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Placa ADBC este formată din triunghiurile simetrice ADC și BDC; centrul de greutate al plăcii și al triunghiului ADC se găsesc pe o aceeași paralelă la AB; conform enunțului, paralela din D la AB trebuie să treacă prin centrul de greutate al triunghiului ADC, deci să fie o mediană, adică să treacă prin mijlocul laturii AC; atunci D este situat la mijlocul înălțimii din C.

Exerciții generale. Exerc. 817. Dacă notăm $ns = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, expresia $E = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 - 3 \sum a_1 a_2 a_3$ nu își schimbă valoarea când înlocuim pe $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ respectiv prin $s - a_1, s - a_2, \dots, s - a_n$. M. I. A.

*Soluție*²⁾. Observăm că $E = \sum a_1 (\sum a_1^2 - \sum a_1 a_2)$ și că $\sum (s - a_1) = ns - \sum a_1 = 2 \sum a_1 - \sum a_1 = \sum a_1$
 $\sum (s - a_1)^2 = ns^2 - 2s \sum a_1 + \sum a_1^2 = \sum a_1^2$,
 iar din $[\sum (s - a_1)]^2 = \sum (s - a_1)^2 + 2 \sum (s - a_1)(s - a_2)$
 deducem $\sum (s - a_1)(s - a_2) = \sum a_1 a_2$.

În acest mod justificăm afirmația din enunț.

1) Dată de d-l VALENTIN C. ISTODOR, liceul Mihai Viteazul, București.

2) Dată de d-l EUGEN A. DODU, liceul Mihai Viteazul, București.

E. G. 819. Notăm $s_k = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$; să se verifice că

$$|s_1 - a_i \quad s_2 - a_i^2 \quad \dots \quad s_n - a_i^n| = (-1)^{n-1} (n-1) a_1 a_2 \dots a_n V_n,$$

unde prima parte este un determinant ale cărui linii se obțin pentru $i = 1, 2, \dots, n$, iar V_n este determinantul VANDERMONDE al cantităților $a_1, a_2, \dots, a_n$.

N. M.

Soluție ¹⁾. Adunăm toate liniile la prima și obținem

$$\Delta = (n-1) \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ s_1 - a_i & s_2 - a_i^2 & s_3 - a_i^3 & \dots & s_n - a_i^n \end{vmatrix} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

scădem linia întâia din celelalte

$$\Delta = (-1)^{n-1} (n-1) \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ a_i & a_i^2 & a_i^3 & \dots & a_i^n \end{vmatrix}$$

și apoi din prima linie, suma celorlalte.

Exemplu ²⁾

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} b+c & b^2+c^2 & b^3+c^3 \\ c+a & c^2+a^2 & c^3+a^3 \\ a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ c+a & c^2+a^2 & c^3+a^3 \\ a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \end{vmatrix} \\ & = 2 \begin{vmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\ & = 2abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 2abc(b-c)(c-a)(a-b). \end{aligned}$$

1) Soluție dată de d-nii: EUGEN DODU (lic. Mihai Viteazul, București), GH. PĂUNESCU, PETRE TEODORESCU (lic. Matei Basarab, București).

2) Exemplu cunoscut.

**Până la 10 Mai 1948, am primit soluții la
exercițiile propuse în numerele 5, 6, 7 și 8,
vol. XIV, dela¹⁾:**

Liceul „Alex. Ghica“, Alexandria.

Clasa a VI: LĂZĂRESCU P. I. (VI: 1052, 4, 5, 64, 6, VII: 1017).

Clasa a VII: LĂZĂRESCU P. P. (VIII: 956, 7, E. G.: 841).

Liceul „Elena Ghica Birta“, Arad.

Clasa a VI-a: GOICEA I. GRAȚIANA (VI: 1053*, 5, 7*, 8*).

Liceul „Moise Nițoară“, Arad.

Clasa a V-a: ARDELEAN T. R. (V: 1051*, 2*, 6, 7*, 8, 9, 60*); CONSTANTINESCU A. V. (V: 1038, 43, 6, 7); COSTINA T. D. (V: 1032*, 6, 7, 8*, 41*, 2, 3, 4*, 5*, 6, 7, 9*, 51*, 2*, 3*); DRAIA R. M. (V: 1036, 7*, 43*, 5*, 6, 7, 9, 50*); PINTILIESCU E. (V: 1047).

Clasa a VII-a: BĂBUȚIA C. I. (VII: 1019, 20, 5, 6, 38); JUHAS P. P. (VII: 1012, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 6, 8, 32, 8); KHEIL O. O. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 8*); OCICA I. V. (VII: 1012, 3, 4, 6, 7, 9, 20, 8, 9, 30); PERNEVAN I. S. (VII: 1015, 9, 20, 3, 5, 6, 8, 9, 30); SALAMON M. T. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 3, 8, 9, 30); SECULIN G. I. (VII: 1014, 7); ZIVOTSKI F. F. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 3).

Liceul teoretic de băieți, Bacău.

Clasa a IV-a: FODOR A. C. (IV: 851, 2, 3*, V: 1043); HUȚU N. G. (IV: 841, 4, 8, 51); LEIBOVICI I. S. (IV: 851, 3*).

Clasa a VI-a: NICA C. A. (VI: 1057*, 66*); VICOL D. M. (VI: 1051, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 60).

Liceul „Samuil Vulcan“, Beiuș-Bihor.

Clasa a IV-a: GORGAN G. M. (IV: 847, 8, 9, 51, 3).

Clasa a V-a: HERLO I. I. (V: 1043, 6, 53*); KRIȘTO I. (V: 1034, 6, 7, 43*, 6); LAZĂR N. D. (V: 1052, 3, 4, 5, 6); LÖKÖSHÁZI A. (V: 1036, 7, 43, 6); MARIȘ I. D. (V: 1056).

Clasa a VI-a: FĂNTÂNARU N. N. (VI: 1051, 2*, 3, 5); POENARU I. S. (VI: 1051, 3, 5); ȘONCODI P. C. (VI: 1052, 3, 4*, 5).

Clasa a VIII-a: DE SABATA P. I. (VIII: 941, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 54, 5, 6, 7, 9, 61, 2*, 3*, 4*, 5*, 6*, 7, E. G.: 827*, 8*, 36*, 7*, E. G.: 841, 2*, 5); PANTEA N. A. (VIII: 955, 6, 7, 63*, 5*, 6*, 7, E. G.: 841).

Liceul monahal „Acoperământul Maicii Domnului“, Bistrița — Vâlcea.

Clasa a IV-a: ENĂCHESCU A. ADINA (IV: 850, 1, 2, V: 1047, 58).

Clasa a V-a: BRAICA I. ELENA (V: 1034, 5, 43, 6, 7, 52, 3, 4, 6).

Clasa a VI-a: CHILĂLĂU B. ELISABETA (VI: 1053, 68*); OPRÎTOIU N. NICULINA (VI: 1054, 8*); TOCANĂ N. LIDIA (VI: 1044, 57*, 68*).

Liceul „Sf. Vasile cel Mare“, Blaj.

Clasa a VII-a: MICLEA I. D. (VII: 1012, 4, 7, 8).

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu foarte bine rezolvat și foarte îngrijit redactat.

Liceul teoretic de fete, Brăila.

Clasa a IV-a: CEFALAN I. NICULINA (IV: 846, 8, 9, 51, 2, 3); CUSTURĂ M. FLORICA (IV: 846, 8, 9, 51, 2, 3); VIZIREANU I. DUMITRICA (IV: 841, 6, 8, 9, 51, 2, 3*, V: 1036, 43*).

Clasa a V-a: PENESCU CARMEN (V: 1035, 6, 7).

Institutul „Sf. Maria“, Brăila.

Clasa a III-a: ANTONIU I. CORNELIA (III: 349*, 52, 3, 5, 6); CHOPP P. GENIÈRE (III: 349*, 50*, 2*, 3, IV: 849); CONDRUȚ I. MARIA (III: 349*, 50*, 2, 3, 5*, 6); GAGU P. RODICA (III: 349, 50, 2, 3, 5, 6); POPA LUCIA (III: 349*, 50, 3, 5*, 6); TĂNĂSCU I. ANITA (III: 349, 50, 2, 3).

Clasa a V-a: RĂȘCANU I. CONSTANȚA (V: 1032, 4, 5, 6, 43, 5).

Clasa a VII-a: BALABAN V. ERMINIA (VII: 1029*).

Clasa a VIII-a: DOBRIN MARCELA (VIII: 955, 6, 67); MOSLEEV ANA (VIII: 956, 67); OLTEANU P. SARMIZA (VIII: 955, 6, 67).

Liceul „N. Bălcescu“ Brăila.

Clasa a IV-a: BUTUNOIU N. E. (IV: 844, 51, 2, 3*); CALCIU N. M. (IV: 851, 2, 3*); IONIȚĂ C. G. (V: 844*, 9, 53*); VLAHU M. N. (IV: 853); VOICULEȚ D. C. (IV: 851, 3*).

Clasa a VI-a: DIMITRIU V. T. (VI: 1053, 4, 5, 7, 8, 9*, 71); NEGULESCU I. F. (VI: 1053, 4, 5, 7*, 8*, 9*, 60).

Clasa a VIII-a: PERIANU ȘT. G. (VIII: 941, 2).

Liceul teoretic de fete, Brașov.

Clasa a III-a: NEGRUȚIU ELENA (III: 352).

Liceul „Andrei Șaguna“ Brașov.

Clasa a III-a: GOIA A. I. (III: 349*, 50*, 1*, V: 1034).

Clasa a IV-a: GOIA A. A. (IV: 844*, 8*).

Clasa a V-a: BÂLCU G. S. (V: 1033*, 46*).

Clasa a VI-a: BUCURESCU N. M. (VI: 1053, 68); NEGRUȚ A. A. (VI: 1057, 68).

Liceul „Dr. I. Meșota“, Brașov.

Clasa a VI-a: IONESCU HEROIU I. M. (VI: 1068).

Liceul industrial experimental „Astra“, Brașov.

Clasa a V-a: BACIU G. G. (V: 1032*, 4, 5, 6, 7, 45*, 53*); COTA A. A. (V: 1031*, 2*, 4, 5, 6, 7, 8, 40*, VI: 1053, 4, 5, 7, 8).

Clasa a VI-a: OLTEANU I. N. (VI: 1057, 8); ȚURCANU C. (VI: 1051, 2*, 3, 4, 6*, 7*, 8*, 60); UNGURU V. C. (VI: 1051, 2*, 3, 4, 6*, 7, 8, 60).

Școala Centrală de fete, București.

Clasa a III-a: POMPONIU I. ANCA (III: 351*, 3, 4*, 60).

Clasa a IV-a: DUMITRESCU I. RITA (IV: 857, 8); GEORGIAN N. MARIA (IV: 843); IONESCU AL. OLGA (IV: 851, V: 1052); NĂSTASE C. ADRIANA (IV: 850, 1*, 2, 3, 4, 5*, V: 1042*, 56, 8).

Clasa a VI-a: CRISTESCU I. SMARANDA (VI: 1053*, 4*, 7*, 8*).

Clasa a VII-a: BONCIU C. MARGARETA (VII: 1023, 31*, 2*, 3*, 4*, 7*, E. G.: 841).

Liceul teoretic de fete Nr. 2, București.

Clasa a IV-a: AVRAMOVICI I. MIOARA (IV: 846, 52, 7, 8); TEICA D. TEODORA (IV: 841, 3*, 4, 6, 7, 8, 51, 2, 3).

Clasa a VI-a: VASILESCU PAULA (VI: 1079).

Liceul teoretic de fete Nr. 3, București.

Clasa a IV-a: NEGOIȚĂ MARGARETA (IV: 847, 57, 8, 9, 60, V: 1038, 43*, 52).

Clasa a VI-a: ANGHELESCU P. SACONTALA (VI: 1059*, 63*, 5*, 71, VII: 1012, 4, E. G.: 827*, 8*, 36*, 7*); STĂNESCU MARIA (VI: 1056*, 60*, 1, 2*, 4*, 6*, 8*, 71, 87, E. G.: 827*, 8*, 41).

Clasa a VII-a: BĂDESCU F. VICTORIA (VII: 1012, 3, 4, 8, 9, 20).

Liceul „Iulia Hașdeu“, București.

Clasa a VII-a: PETRESCU GH. LUCREȚIA (VII: 1022*, 3, 8*, 9, 30*).

Liceul „I. Heliade Rădulescu“, București.

Clasa a VIII-a: HARAM E. ERNA (VIII: 941, 4, 50*); PEȚANCA T. DOINA (VIII: 941, 3, 5*, 7, 9).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa a II-a: DUMITRESCU T. MARIA (III: 352, 5, 6); PIEPTĂNATU G. ELENA (III: 353, 5); POPESCU I. ANA (III: 352, 3, 5, 6); RUSSE F. FLORICA (III: 352, 6).

Clasa a III-a: CUCU T. ELISABETA (III: 349*, 51*); DIAMANDI ELENA (III: 351, 5, 6); IOSIF V. ELVIRA (III: 349, 55); MĂNĂILESCU N. SILVIA (III: 349, 51, 2); SĂRĂȚEANU V. MONA (III: 352*, 5); ȘLEAHTENEA F. ALEXANDRA (III: 355*, 6, 7).

Clasa a IV-a: GEORGESCU M. MARIA (IV: 843, 8, 51, V: 1031, 5).

Clasa a VII-a: MARCU I. ALEXANDRINA (VII: 1017, 8, 20).

Clasa a VIII-a: NEDELICU MARIANA (VIII: 951*, 2, 5, 6, 7, 8).

Institutul de fete „Sf. Maria“, București.

Clasa a IV-a: GHEORGHIU MIHAELA (IV: 841, 3, 4); KLEIN SIDI (IV: 842, 3, 4); TROSTEANETCHI B. SOFIA (IV: 841, 2*, 4); VREJOIU D. DOINA (IV: 841, 6, 50).

Clasa a V-a: GOGA N. SILVIA (V: 1034, 6, 7*, 8*); MAXIM MARIA (V: 1034, 6, 8*); PAPAIANOPOL DOMNICA (V: 1034, 5, 6, 7*, 8, 40*); RUSU GH. ARISTIȚA (V: 1033, 4, 5, 6, 7, 8); SIMCEA CRISTINA (V: 1036, 8*).

Clasa a VI-a: DĂBULEANU EMILIA (VI: 1053*, 4, 5*, 7*, 8*, 9*, 62*); DUMITRESCU I. MARIA (VI: 1051, 3*, 7*); DUȘESCU C. MARIA (VI: 1057*); PATRAULEA T. SIMONA (VI: 1053, 4, 5, 7*, 8, 60); TOMȘENESCU P. LUCIA (VI: 1057*).

Clasa a VII-a: FLOREI LUCIA (VII: 1021, 31*, 3); VOINESCU M. BEATRICE (VII: 1011, 2, 3, 31).

Clasa a VIII-a: CRISTEA C. SANDA (VIII: 941); OPRESCU CRISTINA (VIII: 941).

Liceul Ortodox-Externat „Zoe Romniceanu“, București.

Clasa a VI-a: ȚĂRANU A. EUGENIA (VI: 1052*, 3, 4, 5, 7*, 8*, 60, 2, 3*, 5, 6, 7*, 71, 2*, 3*, 4*, 7*, 9, 80*, VII: 1014, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 3, 4*, 5, 6, 7*, VIII: 956, 7, 9, E. G.: 821, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 36*, 7*, 8*, 9*, 57*).

Institutul „Notre Dame de Sion“, București.

Clasa a V-a: PAPADOPOL V. MIREILLES (V: 1038, 52).

Liceul de fete „Focșăneanu“, București.

Clasa a VIII-a: LAZAROVICI P. FELICIA (VIII: 942, 9, 57, 9, 974, 5, 7, 8).

Colegiul Național „Sf. Sava”, București.

Clasa a IV-a: TELEMAN A. K. (IV: 841, 2, 3*, 4, 5*, V: 1032*, 3*, 4, 5, 6, 7, 8*, 40*, VI: 1051, 3, 5, 6*, 7*, 8*, 60, VII: 1012, E. G.: 821).

Clasa a VII-a: OTTULESCU E. V. (VII: 1012, 3, 6, 8).

Liceul „Gheorghe Lazăr”, București.

Clasa a V-a: MANTA I. (V: 1030*, 6).

Clasa a VI-a: BRĂȚĂȘANU C. P. (VI: 1053, 4, 7*, 8*).

Clasa a VII-a: STĂNESCU D. C. (VII: 1012, 3, 4, 5, 7, 8, 9*, 22*, 3, VIII: 947, E. G.: 827, 8).

Clasa a VIII-a: CORNILESCU G. D. (VIII: 941, 7*, 8, 50*, E. G.: 821); COVALSCHI A. C. (VIII: 941*, 2*, 3, 4*, 6, 7*, 8, 9*, 50*, E. G.: 821, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 30*, 41).

Liceul „Matei Basarab”, București.

Clasa a III-a: FRĂȘIN C. M. (III: 356, 7*, 8*, 9*); MĂCHITĂ P. G. (III: 358*, 9*); RATZ A. (III: 356).

Clasa a IV-a: BEDROSIAN C. B. (IV: 841, 2, 3*, 4, 6, 8, 9, 51, 2, 3, V: 1031*, 6, 43, 52, 6); IȘPIRESCU M. M. (IV: 844, 7, 8); JUSTER M. D. (IV: 841, 4); LUMÂNARE N. F. (IV: 851, 2, 3*, 7, 8, 9).

Clasa a V-a: BĂZU E. (V: 1036); BREZOIANU D. (V: 1036); CÂMPEANU V. I. (V: 1036); CARABIN C. (V: 1036); COHEN A. (V: 1033, 7, E. G.: 824); CRISTEA N. M. (V: 1036, 8); DINCULESCU C. (V: 1036); GRIGORESCU O. (V: 1035); IGAȘ T. (V: 1036); POSMOȘANU D. S. (V: 1035); ȘEFER I. (V: 1036); TOMESCU C. (V: 1035).

Clasa a VII-a: ASLAN R. (VII: 1044); CAMIL E. S. (VII: 1022*, 4*, 5*, 44*, 6); HORODNICEANU S. M. (VII: 1022*, 36*, 7*, 44*, 6*, 8*, E. G.: 849*, 59*, 60*); IONESCU I. B. (VII: 1014, 9, 22, 5, 7, 32); IORDĂNESCU T. ȘTEFAN (VII: 1013, 5, 6, 20, VIII: 942); IOVU A. M. (VII: 1011, 2); KRAMMER I. H. (VII: 1029, 34); LENZ N. F. (VII: 1021, 4*, 5*, 45, E. G.: 841, 9*, 60*); MARIN P. I. (VII: 1029); MARI-NEANU I. N. (VII: 1023, 4*, 9*, 33*, 5*, 7*, 43*, 4*, 6*); MENDELOVICI H. (VII: 1028*, 9); MORARU E. V. (VII: 1033*, 4*, 5*, 6, 7*, 43*, 4*, 5, 6*, E. G.: 841, 9*, 52*, 3*, 60*); PĂUNESCU ȘT. G. (VII: 1039, VIII: 947, 9, 51*, 5, E. G.: 823*, 8*, 9, 36*, 7*, 8*, 60*); POPESCU A. (VII: 1036*); ȘTEFĂNESCU V. (VII: 1014, 29, 44, 5, 6, 7).

Clasa a VIII-a: POPOVICI P. C. (VIII: 944*, 5*, 9, 51*, 66*, E. G.: 821, 4*, 5*, 7*, 8*, 30, 6*, 7*, E. G.: 841); TEODORESCU P. P. (VIII: 943*, 63*).

Liceul „Mihai Viteazul”, București.

Clasa a V-a: ILIESCU F. C. (V: 1056); ISTODOR C. V. (V: 1033*, 4, 5*, 8*, 40*, 51*, 2, VI: 1051, 4, 6*, 7*, 8*, 9*, 60, 1, VII: 1013, 9*, E. G.: 827*, 8*).

Clasa a VI-a: CONSTANTINESCU V. V. (VI: 1052*, 62*, 3*, 5, 6*, 7*, 71, 2*, 3*, 4*, 7*, 9, 80*); DUMITRAȘCU I. C. (VI: 1059, 60, 3*, 4*, 5, 6*, 7*, 8*, 9, 70*, 1, 2*, 3*, 80*, 1, 2*, 4, VII: 1021, 2*, 32*, E. G.: 831*); SÂNDULESCU C. Ș. (VI: 1053, 4, 5, 7*, 8*, 60, 1, 8, 9).

Clasa a VIII-a: DODU A. E. (VIII: 941, 2, 3*, 4*, 5*, 6, 7, 8, 9, 50*, E. G.: 821, 2*, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 30*); POSTELNICU V. T. (VIII: 941, 4, 5*, 54*, 6, 7, 9).

Liceul „Dimitrie Cantemir”, București.

Clasa a VII-a: IONESCU A. E. (VII: 1017).

Liceul „Spiru Haret”, București.

Clasa a VIII-a: MIRONESCU C. N. (VIII: 942, 5*); STAN D. A. (VIII: 945*).

Liceul „Titu Maiorescu“, București.

Clasa a II-a: POPESCU M. C. (III: 351*, 8*, 9*, 60*, IV: 856*, 8, V: 1038).

Clasa a III-a: CONSTANTINESCU I. O. (III: 349*, 51*, 2*, 3, 5*, 6, IV: 849, 50, V: 1058).

Clasa a VI-a: CONSTANTINESCU T. D. (VI: 1052, 3, 4, 5, 61, VII: 1019, E. G.: 821); DELEANU I. A. (VI: 1051, 3, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 60, VII: 1019*, VIII: 949, E. G.: 827*, 8*); HOHOR A. P. (VI: 1053, VII: 1019); VISARION A. V. (VI: 1051, 3, 4, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 60; VII: 1011*, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, VIII: 946, 8, 9, E. G.: 821*, 2*, 4*, 5*, 7*, 9*); ZĂNESCU A. L. (VI: 1053*, 7*, 8*, 63*, 6*, 8*, 9*, VII: 1019, 26).

Clasa a VII-a: RASIDESCU C. ȘT. (VII: 1039*, VIII: 941, 2).

Clasa a VIII-a: NESTORESCU C. D. (VIII: 941, 50, 66).

Liceul „Gheorghe Șincai“, București.

Clasa a IV-a: MIHĂILESCU C. N. (VI: 848, 9, 50).

Clasa a V-a: POPESCU V. D. (V: 1031*, 2*, 4, 5, 6, 7, 8*, 40*).

Clasa a VI-a: LOVIN C. M. (VI: 1053*, 9*, 60, 1, 2, 3*, 9*, 71, 2*, 3*, 4, 5, VII: 1013, 21, 3, 31*, 2*, E. G.: 826*, 7*, 8*, 36*, 7*, 41, 5).

Clasa a VII-a: SIMIONESCU I. S. (VII: 1011*, 3, 7, 8).

Clasa a VIII-a: POPESCU A. R. (VIII: 941, 2, 3, 4*, 5*, 9, 50*, 4*, 5, 6, 9, 60*, 6*, 7, 70*, E. G.: 827*, 8*, 36*, 7*, 41, 2*, 50).

Liceul teoretic de băieți Nr. 9 București.

Clasa a V-a: SCÂNTÉE A. A. (V: 1032*, 3*, 4, 5, 7*, 8*, 9*).

Clasa a VI-a: OPRESCU M. I. (VI: 1051, 4, 6*, 7*, 8*, 9*, 60, 3*, 6*, 8).

Clasa a VII-a: CORCIOVEI I. A. (VII: 1011*, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 20, 1, 2*, 3, 4*, 5*, 6, 7, 8*, 9, 30*, VIII: 856, 7, 9, E. G.: 821, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 31, 4, 6*, 7*, 8*, 9*); LUCA M. C. (VII: 1017, 28); WINTER A. G. (VII: 1015, 7, 8).

Liceul „Mihail Eminescu“, București.

Clasa a VII-a: GEORGIAN M. T. (VII: 1021, 7).

Liceul „Aurel Vlaicu“, București.

Clasa a VII-a: CHIRCULESCU C. N. (VII: 1011*, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9*, 21, 2*); MUȘAT ȘT. I. (VII: 1011*, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, VIII: 947, E. G.: 825*); NICOLAU D. C. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 20, 1, 2*, 6, VIII: 947, E. G. 821, 43*).

Clasa a VIII-a: OLARU G. V. (VIII: 941, 2, 3, 4, 9); VILĂU G. CONST. (VIII: 941, 54, 6, 64, 6, E. G.: 841).

Liceul „Sf. Iosif“, București.

Clasa a VI-a: IANCULESCU R. G. (VI: 1051, 2, 4, 5, 60).

Liceul „Profesorii Asociați“ București.

Clasa a VIII-a: GENETAI ȘT. (VIII: 947, 9, 74); HAGIU I. (VIII: 963, 4); NEGREANU AL. (VIII: 971*); NIȚULESCU Z. (VIII: 953); OPREA V. (VIII: 963, 7); SOCACIU ȘT. (VIII: 947, 52).

Liceul „M. Sebastian“, București.

Clasa a IV-a: ZAIDMAN D. S. (IV: 841, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 50, 1, 2, 3, 7, 9, V: 1052).

Clasa a VII-a: KAMENITZER A. S. (VII: 1019, 26, 9, 31, 2, 8, E. G.: 839*, 41, 3).

Liceul „B. P. Haşdeu“, Buzău.

Clasa a VI-a: MERIU C. GH. (VI: 1059*, 62, 3*, 6*, 9, 71, 4, E. G.: 827*, 8*, 35*, 6*, 7*, 45); STĂNESCU N. P. (VI: 1053, 4, 5, 6, 7, 8, 66); STOIAN N. D. (VI: 1052, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 61, 6, 8, 9, 70, E. G.: 827, 8).

Clasa a VII-a: BUNEA C. I. (VII: 1012, 5, 7, E. G.: 827*, 8*); TOMA G. C. (VII: 1012, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2*, 3, 4*, 6, 7, 8, 9, 30, 45, VIII: 970, E. G.: 827, 8, 37, 9*, 52, 3*); TOPA I. N. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 20, 1, 2*, 3, 4*, 5, 6, 7, 8*, 9, 30*, VIII: 951*, E. G.: 827*, 8*, 36*, 7*, 8*, 9*); ZĂMBIRESCU I. V. (VII: 1012, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2*, 4*, 5, 6, 7, 8*, 9, 30, 2, 3, 4, 5, 8*, 9*, 40, VIII: 951*, E. G.: 826*, 7*, 8*, 36*, 7*, 8*, 9*)

Liceul „Ştirbei-Vodă“, Călăraşi, Ialomiţa.

Clasa a V-a: DAVID N. N. (V: 1034, 5, 6*, 7, 8); DUMITRESCU P. P. (V: 1047*, 54, 6).

Clasa a VI-a: GOICEA I. I. (VI: 1053, 4, 5, 6, 7, 8, 62, 5, 6, 7, 9, 71, VII: 1021); POPESCU I. G. (VI: 1051, 7, 8, 60, 6); RĂDULESCU V. A. (VI: 1062, 4, 6, 9*, 72).

Clasa a VII-a: IONESCU N. N. (VII: 1023*, 5, 9, 30, 4, 5, 9*); LĂZĂRESCU FL. (VII: 1017, 28).

Liceul teoretic de fete, Câmpina.

Clasa a IV-a: PETCU N. SANDA (IV: 851, 2, 3, 4*).

Liceul „D. B. Ştirbey“ Câmpina.

Clasa a VII-a: IORGULESCU T. D. (VII: 1026, 8*, 9, 30*, 3, 4*, 5*).

Liceul „Dragoş-Vodă“, Câmpulung-Bucovina

Clasa a VIII-a: GRIGOROVICI G. I. (VIII: 941, 2*, 3, 4*, 5, 6, 7*, 8, 9).

Liceul teoretic de fete, Câmpulung-Muscel.

Clasa a V-a: ANTONE C. ELENA (V: 1047, 52); BRĂTUCU I. FILOFTEIA (V: 1047, 52); MILEA VIORICA (V: 1034, 7, 45*, 7*, 52, 3); RĂDULESCU NUŢA (V: 1045*, 52); ZĂVOIANU MARIA (V: 1052, 3).

Liceul „Dinicu Golescu“, Câmpulung-Muscel.

Clasa a IV-a: ANDREESCU C. C. (IV: 851, 2, 3*, V: 1052); ARVĂTESCU C. A. (IV: 851, 2, 3*, V: 1052); BĂNICĂ GH. I. (IV: 851, 2, 3*, V: 1052); BULUGIOIU I. I. (IV: 851, 3*); DOBRESCU C. C. (IV: 846, 8, 9); DONOIU V. E. (IV: 851, V: 1052); DRAGOSLOVEANU I. (IV: 851, 3*); IVAŞCU I. V. (IV: 851); MARINESCU D. I. (IV: 851); MATEESCU P. T. (IV: 851, 3, V: 1052); MOISE I. N. (IV: 851, 3*); MURARU I. I. (IV: 851, 2, 3*, V: 1052); ORMAN I. G. (IV: 851, 3*, V: 1052); PETREANU C. I. (IV: 851, 3*, V: 1052); POSTOACĂ C. I. (IV: 848); RĂDULESCU P. N. (IV: 849, 51*); SIBIANU E. (IV: 851, 2, V: 1052); TĂMAŞ I. C. (IV: 849, V: 1036); TĂNĂSESCU I. GH. (IV: 849); TOADER P. N. (IV: 851, 3); ZAMFIR F. I. (IV: 851, 2, 3*, V: 1052).

Clasa a V-a: MIHAILOVICI M. A. (V: 1047, 55, 6*); MINCĂ G. F. (V: 1035, 6, 7, 43, 7, 52); VIŞOIU AL. GH. (V: 1047, 52, 3, 4, 6).

Clasa a VI-a: ARSENE J. V. (VI: 1054); BĂRBOI P. I. (IV: 1054); BRĂTULESCU N. N. (VI: 1054); BUMBULICI I. I. (V: 1051, 3, 4); CAZACU D. I. (VI: 1053); COPĂESCU G. GH. (VI: 1053, 4); COTENESCU GH. (VI: 1054); DEACONU G. V. (VI: 1057, 8, 68); DIACONESCU T. I. (VI: 1051, 4, 7*); DONICI M. (VI: 1054); DUICAN GH. I. (VI: 1051, 4); DUMITRACHE N. N. (VI: 1051, 4); IANCOTESCU MAGHERU P. P. (VI: 1054); ILIE C. C. (VI: 1051, 4); ILIESCU I. I. (VI: 1051); IONESCU M. C. (VI: 1051, 3, 4); MĂRFU I. P. (VI: 1054, 7, 8*, 68*); MELCIOIU G. D. (VI: 1051, 4); MIHAI V. (VI: 1058); MOISESCU GH. C. (VI: 1054, 7, 8); MOLEA N. M. (VI: 1051, 3, 4); MĂLĂUCIOIU I. C. (VI: 1054); MACIOC G. D. (VI: 1058*, 68*); MORARU

GH. V. (VI: 1051, 4); NICOLAE I. I. (VI: 1051, 4); NICOLESCU L. T. (VI: 1051, 3, 4); POPESCU G. G. (VI: 1051, 4); POPESCU GH. I. (VI: 1051, 4); POPESCU N. V. (VI: 1053, 4, 7, 8*, 68*); POPESCU V. C. (VII: 1058, 68); POPESCU V. C. (VI: 1058, 68); POPESCU N. V. (VI: 1053, 4, 7, 8); SCHITEANU E. E. (VI: 1054); SCHITEANU E. I. (VI: 1054); SCHEAN I. D. (VI: 1054, 7, 8, 68); TOMA I. I. (VI: 1051, 3, 4); TAN V. P. (VI: 1051, 4, 7*, 8*); TRONARU C. I. (VI: 1054, 7); VLAICU I. I. (VI: 1051, 4, 7); VASILESCU L. (VI: 1058, 68).

Clasa a VII-a: BIVOLARU L. (VII: 1014, 7, 30*, E. G.: 824); BRĂNESCU I. V. (VII: 1028, 34); BUTOI I. I. (VII: 1030, 4); CIOLĂNESCU I. V. (VII: 1028, 34); DUMITRESCU G. A. (VII: 1021, 3, 5*, 7, 8*, 9, 30*, 4); GAVRILESCU M. (VII: 1022*, 8, 34*); GÂDEI G. A. (VII: 1022); GEORGESCU N. N. (VII: 1025, 8, 34); LUCA I. I. (VII: 1028, 30); MARINESCU V. AL. (VII: 1028, 34); MĂLÂNCIOIU P. (VII: 1028, 34); MILEA I. GH. (VII: 1022, 9); MINCIUNESCU T. I. (VII: 1028); MOCANU V. (VII: 1017, 22, 34); NEAGOE A. C. (VII: 1018, 27, 34); PARGHEL I. I. (VII: 1014, 17, 32, 4); PÂRVULESCU GH. (VII: 1034); POȘOIU GH. (VII: 1027, 8, 32, 4); POPESCU D. P. (VII: 1028, 34); ȚĂRÂNGOIU GH. GH. (VII: 1028, 34).

Clasa a VIII-a: BRATU I. I. (VIII: 938, 56*, 7, 61); BURNAT R. R. (VIII: 949, 56, 61); CONSTANTINESCU GH. A. (VIII: 938, 56, 61); CORNECI I. N. (VIII: 938, 42, 57, 61, 4); DIACONESCU C. I. (VIII: 938, 56); GEORGESCU D. C. (VIII: 938, 49, 61); GHEORGHIOU I. D. (VIII: 938); GIUȘCĂ I. R. (VIII: 938, 49, 57, 61, 4); GRIGOROIU V. I. (VIII: 938, 42, 56*, 7, 61, 4); ILINESCU V. I. (VIII: 938, 49, 56); MANOLESCU B. I. (VIII: 938, 57, 61, 4); MARIN GH. I. (VIII: 938, 61, 4); OPREA A. S. (VIII: 961); PÂRVULESCU S. (VIII: 938, 56, 7, 61, 4); POPESCU C. C. (VIII: 938, 61, 4); STOICA V. (VIII: 938, 49, 56, 7, 61); VASILIU E. M. (VIII: 938, 57, 61, 4); VLAICU S. GH. (VIII: 938, 61, 4).

Liceul „Ionifă Assan“, Caracal.

Clasa a VII-a: ANDREESCU V. (VII: 1012, 4, 7, 8).

Liceul „Traian Doda“, Caransebeș.

Clasa a VI-a: CERNUȘEN A. L. (VI: 1060*, 2); MILIȚESCU GH. (VI: 1069).

Clasa a VII-a: BOGOEVICI I. N. (VII: 1012, 3, 4, 7, VIII: 941).

Liceul teoretic de fete Nr. 1 Cluj.

Clasa a IV-a: MOLDOVAN GEORGETA (IV: 851).

Clasa a VIII-a: POP A. ALEXANDRINA (VIII: 956).

Liceul teoretic de fete Nr. 2, Cluj.

Clasa a VII-a: FĂRĂIANU ȘOIMIȚA (VII: 1011*, 2*, 3*, 4, 5, 6, 7, 8*, 9).

Liceul Teoretic de băieți Nr. 2, Cluj.

Clasa a IV-a: BALEA G. (IV: 853); BULARDA M. (IV: 849); MOLDOVANU I. E. (IV: 853); SANTEJUDEANU V. T. (IV: 841).

Clasa a V-a: CÂMPEANU AL. (V: 1052); SĂBĂU I. GH. (V: 1043, 52); ȘTECLĂ M. (V: 1037); VULTUR I. (V: 1043, 6, 7).

Clasa a VII-a: BORZA I. (VII: 1021); POP V. G. (VII: 1021); WAGNER R. (VII: 1014).

Liceul „G. Barițiu“, Cluj.

Clasa a VI-a: MIKLOS P. (VI: 1061, 80).

Liceul „Inochentie Micu Clain“, Cluj.

Clasa a V-a: DEAC I. N. (V: 1022, 7); FARCĂU I. V. (V: 1022); JURJA D. I. (V: 1022); LUPU E. (V: 1022, 7, 36, 7).

Clasa a VII-a: BOLDUR A. L. (VII: 1012, 4, 5, 6, 7, 8, 23*, 8*, 9*, 30. VIII: 956, 9); BCRZ G. G. (VII: 1012, 7, 8); LAZĂR AL. (VII: 1017).

Liceul ortodox „Mitr. Simeon Ștefan“, Cluj.

Clasa a V-a: ALEXANDRU L. (V: 1032, 5); BOTEZ M. FL. (V: 1035, 7, 8); NEMES V. M. (V: 1032, 5, 7, 8).

Clasa a VII-a: MUNTEANU G. S. (VII: 941, 2, 3, 5, 7*).

Seminarul Pedagogic Universitar, Cluj.

Clasa a V-a: IONESCU G. D. (V: 1034, 6, 8); VASILESCU V. C. (V: 1055).

Liceul „Mircea cel Bătrân“, Constanța.

Clasa a III-a: CONSTANTINESCU N. (III: 347, 50, 2, 5).

Clasa a VII-a: MĂNESCU V. GH. (VII: 1028, 9; E. G.: 841).

Liceul de fete „Elena Cuza“, Craiova.

Clasa a V-a: GEORGESCU ELVIRA (V: 1032, 5, 6, 7*).

Clasa a VII-a: GEORGESCU GABRIELA (VIII: 941, 4).

Liceul teoretic de fete Nr. 2 Craiova.

Clasa a IV-a: ȘERBAN MIȚODORA (IV: 841*, 3).

Clasa a V-a: ILIE M. GENOVEVA (V: 1037, 46, 54).

Clasa a VI-a: CIOVICĂ I. ANGELA (VI: 1053, 7, 8).

[Liceul „Frații Buzești“, Craiova.

Clasa a VI-a: MATEI D. I. (VI: 1066, 9, 71, 4).

Liceul Armatei „D. A. Sturdza“, Craiova.

Clasa a IV-a: BĂJAN C. T. (IV: 843); BÂRLOGEANU M. (IV: 851); BĂZĂVAN E. (IV: 841, 2, 3*, 51); CHESNOIU I. T. (IV: 841, 2*, 3); FLORESCU C. D. (IV: 843); MALCOCI S. M. (IV: 842, 3); MARINESCU S. C. (IV: 841, 51, 2, 3); POPA C. V. (IV: 842); POPA G. N. (IV: 841, 2, 3*); POPA ST. A. (IV: 843); ȘERBAN I. I. (IV: 843); ȘERBĂNESCU S. L. (IV: 841, 2, 3*); SEMENESCU N. GH. (IV: 843, 53); TURBATU M. C. (IV: 841, 3, 51); ZAMFIR GH. (IV: 842, 3).

Clasa a VI-a: BAGHINA V. (VI: 1062*, 3, 4*, 5, 6, 9*, 70*, 1*, 2, 3; VII: 1011, 20, 8, 32, 3; VIII: 951, 5, 8, 67, E. G.: 821, 41, 9); CUPEȘ D. M. (VI: 1057); DIACONESCU A. I. (VI: 1051, 3, 7, 8, VII: 1019); DRĂGAN I. (VI: 1053, 7, 8); STAIU F. (VI: 1053, 7, 8); VÂRZARU I. E. (VI: 1051, 3*, 4, 7, 8, 60, VII: 1018, E. G.: 826).

Clasa a VII-a: VASILIU M. M. (VII: 1011, 2, 3*, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*, 8, 9; VIII: 941, 6, 7, 9, 51, 5, 6*, 8, 9*, E. G.: 826*, 7, 8, 30, 5*, 6, 7, 41*, 9).

Clasa a VIII-a: CIUCĂ I. T. (VIII: 946*, 56); MÂNDRESCU E. (VIII: 941, 6*, 51, 6); PETRACHE I. S. (VIII: 946, 56); PICULESCU I. M. (VIII: 941, 6, 51*, 6, 8*, E. G.: 841); STĂNCESCU N. V. (VIII: 941, 6, 9*, 51, 6).

Colegiul Militar, Curtea de Argeș.

Clasa a V-a: JUGĂNARU GH. (M. V: 1031, 2*, 4, 6, 7, 43, 5*, 6, 7, 51, 2*, 3, 4, 5, 6, 61); NAP O. H. (V: 1021, 36, 43, 6, 53); OPREA I. M. (V: 1032, 4, 5, 7); PĂTROC P. N. (V: 1032, 4, 45, 7*, 52*, 3, 4*, 6, VII: 1021); SPIRESCU GH. C. (V: 1036, 7, 53); TOMESCU GH. M. (V: 1031, 2, 4, 5, 6, 7*, 41, 3, 5, 6, 7, VI: 1051*, 61, VII: 1021, E. G.: 821, 41).

Clasa a VI-a: BERBESCU C. O. (VI: 1062*); CIOLAC C. E. (VI: 1058, 68); DIMA D. E. (VI: 1057, 8, 66, 8*, 9); DOBRE C. C. (VI: 1058, 68, 9); DRĂGĂNESCU I. D. (VI: 1057, 68, 9); DIMA D. GH. (VI: 1057, 8, 62, 7*, 8*, 9); DUNĂ G. G. (VI: 1052*, 63, 71, 2*, 4, VIII: 956, 7, E. G.: 827*, 8*, 36*, 7*, 41); ELEF-

TERIE I. D. (VI: 1058, 62*, 8, 9); EPURE GH. C. (VI: 1057, 8, 68, 9*); ISTOC M. I. (VI: 1057, 8, 66*, 8, 9); MACARIE M. (VI: 1058, 68, 9); MATEI I. C. (VI: 1068, 9); MICLESCU O. C. (VI: 1058, 68); MOISESCU I. I. (VI: 1058); NĂDRAG GH. (VI: 1066, 8).

Clasa a VIII-a: BARANGA I. (VIII: 931, 5, 6*, 7, 8, 9*, 41, 2, 3*, 4, 5, 6, 7*, 8, 9, 50, E. G.: 816); CIOBĂNICĂ M. (VIII: 937, 8, 9, 46, 9, E. G.: 816); BÂRSAN D. (VIII: 938*, 9, 41, 5, 6, 9); GRIGORESCU P. S. (VIII: 939); GEORGESCU A. C. (VIII: 946); MARIN FL. (VIII: 931, 5, 6, 9); NIȚESCU D. C. (VIII: 931, 5, 6, 7*, 9); PRECUP I. (VIII: 931, 7, 8, 9, 46*, 7, 8, 9, 50; E. G.: 816); RARINCA C. (VIII: 936*, 7, 8, 9, 49, E. G.: 816); STÂNCULESCU M. (VIII: 937, 8, 9, 46, 9, E. G.: 816); SOARE N. S. (VIII: 931, 2, 6*, 7, 8, 9, 41*, 5, 6*, 7, 8, 50, E. G.: 816); STĂNESCU N. I. (VIII: 931, 6, 7, 8, 9, 46, 7, 9, 50); WITKOWSKA AL. (VIII: 937, 9, 49, E. G.: 816).

Liceul „Andrei Mureșeanu“, Dej.

Clasa a VII-a: TUDORAN I. (VII: 1012).

Liceul „Decebal“, Deva.

Clasa a VI-a: SÂRBU O. (VI: 1053, 4*, 5).

Liceul „Radu Negru“, Făgăraș.

Clasa a VIII-a: DUMITRAȘCU C. (VIII: 942, 3, 4, 51*, 2, 4, 5, 6, 66, E. G.: 827, 8, 42, 3); MOGOȘ I. I. (VIII: 842, 5, 9, 50, 1, 2*, 4, 5, 7, 8*, 63, 6, 7, 8*, E. G.: 821, 4, 7, 8*, 35, 6, 7, 9, 41*, 2*, 3, 5, 9); ROȘCA M. V. (E. G.: 821, 7, 8, 36, 7, 42).

Liceul „Nicu Gane“, Fălticeni.

Clasa a V-a: GHIUREA FL. (V: 1012, 23, 6); PERJERU E. (V: 1034, 5, VII: 1012, 4).

Liceul Mixt Fetești

Clasa a IV-a: DEACU P. D. (IV: 844, 8).

Liceul teoretic, Găești.

Clasa a VIII-a: BĂRBULESCU I. H. (VIII: 951, 5, 6).

Liceul „Iulia Hajdeu“, Lugoj.

Clasa a III-a: HONDRU ARIADNA (III: 341, 50, 1).

Clasa a IV-a: TURCU I. FLORICA (IV: 847, 50).

Liceul „Coriolan Brediceanu“, Lugoj

Clasa a V-a: DANUBIANU D. (V: 1032, 5, 6, 7, VI: 1051).

Liceul „Em. Gojdu“, Oradea-Mare.

Clasa a IV-a: CACIORA P. D. (IV: 836, 41, 6).

Clasa a V-a: CIUPA L. L. (V: 1043, 6, 53, 4, E. G.: 841); FOROSIGAN A. (V: 1037, 43, 53); LEUCA T. V. (V: 1034, 5, 6, 7, 8); ORȚAN T. GR. (V: 841, 3, 4); NICOARĂ N. T. (V: 1035, 6, 8).

Clasa a VI-a: HAȚIEGANU A. P. (VI: 1060, VII: 1029, 30, E. G.: 826, 7, 8); SÂRBU C. N. (VI: 1053, 4, 5, 7, 8, 60, 1, 3, 8, 9, 71, 8, 80; VII: 1022, 6, 32, E. G.: 841, 7*); STOIA F. D. (VI: 1032*, 51, 2, 3, 7, 8, VII: 1019, 26); ȘUTA I. M. (VI: 1073, 4, 5, 8, 80, VII: 1013, 8, 31, E. G.: 826).

Clasa a VII-a: CĂBUȚĂ I. (VII: 1038, 9, 44); POPA F. P. (VII: 1015, 6, 22, 3, 4*, 6*, 30, VIII: 949, 55, 6).

Liceul „Doamna Oltea“, Oradea.

Clasa a VI-a: BARBONȚA D. FLORICA (VI: 1051, 3, 7, 8, 61, 8, VII: 1021, E. G.: 841).

Liceul „Alex. Roman“, Oradea-Mare.

Clasa a VI-a: PINȚIA G. G. (VI: 1057, 8, 70, VII: 1013, 4, 5, 6, 7, 9, VIII: 939, 47, 9, E. G.: 824, 5, 41).

Clasa a VII-a: BADEA D. I. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9); VIDICAN G. I. (VII: 1013, 5, 6, 9, 24, 6, 7, 9, VIII: 947, E. G.: 841).

Liceul „G-I Dragalina“, Oravița.

Clasa a IV-a: CIORTEANU G. B. (IV: 858); NICOLICI B. D. (IV: 841, 6, 8, 51).

Clasa a VII-a: CIORTUZ N. I. (VII: 1017, 27, 8*, 34*).

Liceul „Petru Rareș“, Piatra-Neamț.

Clasa a VI-a: ALTER M. I. (VI: 1051, 2*); ZAMFIR C. V. (VI: 1043, 4, 6, 57, 8, 61).

Liceul teoretic de băieți Nr. 1, Pitești.

Clasa a III-a: HARĂȚĂU S. I. (III: 349, 50, 1); TOMA G. I. (III: 349, 51, V: 1038).

Clasa a IV-a: ARSENE G. C. (IV: 841, 46, 7); BUNESCU I. A. (IV: 841, 3, 4, V: 1034, 5, 6); DONOS A. N. (IV: 841, 3, 4); HĂRĂȚĂU G. A. (IV: 841, 2, 3, 4, V: 1034, 5, 6, 7); MARINESCU D. G. (IV: 841, 3, 4, V: 1036); PIETRARU S. V. (IV: 841, 2, 3, 4, V: 1034, 6, 7, 8, VI: 1051); STĂNESCU A. V. (IV: 851, 2*, 3, 5, V: 1052*, 3, 4, 8, 60, E. G.: 841, 3).

Clasa a V-a: CRISTIAN T. N. (V: 1053, 6, 60); MIHAI S. C. (V: 1055, 6).

Clasa a VI-a: ALEXE P. I. (VI: 1051, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, VII: 1013, 9, E. G.: 824, 7, 8); ANDREESCU O. I. (VI: 1062, 4, 7, 2, 4, 6*); ANGHELESCU N. M. (VI: 1054, 7, 8); DUMITRESCU I. (VI: 1053, 4, 5, 6, 7, 8, 60); GABOR V. D. (VI: 1051, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, VII: 1019); ILIESCU C. P. (VI: 1051, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 60, VII: 1019, VIII: 947, E. G.: 827); LEIBOVICI M. I. (VI: 1051, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, VII: 1019, E. G.: 827*, 8); MUȘAT G. I. (VI: 1053, 4, 5, 7, 8); RĂDULESCU ST. C. (VI: 1051, 2, 3, 4, 5*, 6*, 7, 8, 9*, 60, VII: 1015, 6*, 7*, 8, 9, 32, VIII: 946, 7, E. G.: 827*, 8*, 36*, 7*, 41); RISTEA G. G. (VI: 1051*, 3*, 4*, 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 60*, VII: 1013*, 7, 8, 9, VIII: 946, 7, E. G.: 821, 7*, 8*); TOMA A. C. (VI: 1051, 2, 5, 6, 7, 8, VII: 1014, VIII: 946, 7, 9); TOMESCU I. M. (VII: 1052, 3).

Clasa a VII-a: BORNESCU S. C. (VII: 1014, 5, 6, 7, 8); NEDELESCU I. P. (VII: 1015, 9, 21, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, VIII: 947, E. G.: 826*, 7*, 8*).

Clasa a VIII-a: STĂNCULESCU S. F. (VIII: 841*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6, 7, 9, E. G.: 830).

Liceul „Sf. Petru și Pavel“, Ploiești.

Clasa a VI-a: APOSTOL C. P. (VI: 1061, 2, 3, 71, 2, 3).

Liceul de fete „Despina Doamna“, Ploiești.

Clasa a VI-a: CĂLUȘIȚĂ MIOARA (VI: 1055*, 7, 8, 60, 2, 3*, 6*, 8).

Colegiul Militar „N. Filipescu“, Predeal.

Clasa a III-a: PETRESCU G. M. (III: 356).

Clasa a IV-a: STOICA D. V. (IV: 851, 2, 3, V: 1052, 3).

Clasa a V-a: FĂCĂOARU G. I. (VI: 1052*, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, VII: 1011, 2, VII: 946, 7*, E. G.: 828*); GURIȚĂ C. V. (V: 1033, 9, 46, 52, 3, 4, 5, 6, 7, 8); HOGER GR. (V: 1034, 5, 6, 7, 8, 9, 40); SĂVULESCU I. G. (V: 1046, 9, 51, 2, 3, 5, 6, 7, 8).

Clasa a VII-a: GEORGESCU N. N. (VII: 1026, 9, E. G.: 827).

Liceul mixt „N. Titulescu“, Pucioasa Dâmbovița.

Clasa a V-a: OLTEANU M. G. (V: 1037, 45, 6, 52, 4, 6); STĂNESCU D. CONSTANȚA (V: 1035, 6, 7, 53, 4, 6).

Liceul teoretic de fete Râmnicul-Sărat.

Clasa a III-a: CAZACU NELI (III: 352, 3, 4, 5, 6); GĂGESCU C. VIORICA (III: 352, 3*); GRIGOROȘCUȚĂ S. ȘTEFANIA (III: 349, 51, 2, 3, 5, 6); RĂILEANU D. ILARIA (III: 349, 53, 5, 6); ȘTERN EDITH (III: 352, 5).

Clasa a V-a: COJA D. LIVIA (V: 1052, 3, 4).

Clasa a VII-a: IORGU N. JANA (VII: 1018, 30, 4).

Liceul teoretic de băieți Râmnicul-Sărat.

Clasa a III-a: FRUNZĂ G. V. (III: 352, 4, IV: 837); POPESCU P. V. (III: 349, 50, 2, 3, 4, 5, IV: 837); SÂNDULESCU M. I. (III: 325, IV: 837).

Clasa a IV-a: DOBRILĂ S. GH. (IV: 851, 2, 3); LUCIAN AL. GH. (IV: 846, 52); NEGOESCU ST. A. (IV: 846, 8, 51, 2); SCHÄCHTER M. A. (IV: 841, 3, 8, 51, 2).

Clasa a V-a: DRĂGULESCU P. (V: 1033, 4, 5, 6, 7, 8); IOSIFACHE A. (V: 1035, 52); ROȘIORU S. D. (V: 1037, 53, VII: 1021, VIII: 957); TABACU F. (V: 1035, 6, 45, 6, 53); TOMA N. (V: 1035, 6, 45, 6, 53); VELEA M. N. (V: 1035, 6, 45, 6, 53).

Clasa a VI-a: BOTEA D. V. (VI: 1052, 3, 61, E. G.: 841); CÂNDEA S. E. (VI: 1055, 61, 71, E. G.: 841); CONSTANTINESCU N. D. (VI: 1051, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9*, 60, 1, 2, 3, 4*, 5*, 6*, 7*, 8, 9, 70; VII: 1012, 23, E. G.: 827, 8, 36); DUȚĂ M. I. (VII: 1052, 3, 4*, 7, 8, 61, 8, 9, 81, 2*); IORGU M. TH. (VI: 1043, 52, 3, 4*, 7*, 8*, 61, 8*, 9, 81*, 2*).

Clasa a VII-a: COSMA I. GH. (VII: 1011, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 1, 2, 3, 5, 6, 8*, 9*, 30*, 2*, VIII: 939, 46, 7, 56, E. G.: 821, 5, 43*); CRISTODOR N. V. (VII: 1011, 2, 4, 7, 8, 9, 22, E. G.: 841); POPESCU P. (VII: 1011*, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 24, 6, 7, VIII: 947, E. G.: 825*).

Clasa a VIII-a: NECULA D. A. (VIII: 840, 4*, 5*, 6, 7, 9, 52, 5, 6*, E. G.: 825, 40, 3).

Liceul teoretic de fete Râmnicul-Vâlcea.

Clasa a IV-a: ZIDĂROIU N. ELENA (IV: 843).

Clasa a VI-a: ZGRIPCEA MAGDALENA (VI: 1055, 6, 9, 69, VII: 1012, 4, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Al. Lahovary“, Râmnicul-Vâlcea.

Clasa a IV-a: FLORESCU N. E. (IV: 844).

Clasa a VI-a: MÂRZAN D. E. (VI: 1069).

Clasa a VII-a: BĂDULESCU N. D. (VII: 1021, 2, 6, 9); BRIA G. N. (VII: 1029, E. G.: 841); POPESCU D. C. (VII: 1021, 39).

Liceul teoretic, Reșița.

Clasa a VI-a: STĂNESCU D. C. (VI: 1058).

Liceul „Roman Vodă“, Roman.

Clasa a VIII-a: SIMIONESCU T. G. (VIII: 941, 2*, 4*, 9).

Liceul teoretic mixt, Sănicolaul Mare Timiș-Torontal.

Clasa a V-a: BONIȘ M. N. (V: 1023, 35, 6, 7); WAGNER I. I. (V: 1035, 6).

Clasa a VI-a: STOICĂNESCU M. A. (VI: 1053, 4, 7, 8); VOICHIȚĂ N. T. (VI: 1053, 4*, 5*, 7, 8, 60).

Clasa a VII-a: WOLF I. I. (VII: 1014, 7, E. G.: 828, 41).

Liceul „Gh. Lazăr“, Sibiu.

Clasa a III-a : BOLDEA N. N. (III: 351, 7); NISTOR I. D. (III: 350*, 5*, 6, IV: 849, 55*); POPESCU V. M. (III: 352, 6).

Clasa a V-a : BLEBEA A. D. (V: 1034, 5, 6, 7).

Clasa a VI-a : SCHLOMIUK H. N. (VI: 1053, 4, 5*, 6, 61, 9, 73, VII: 1032*); SIMONIS E. (VI: 1053, 7, 8).

Clasa a VIII-a : CAISAN P. D. (VIII: 951*, 6, 63*, 6*).

Liceul teoretic de fete Slatina-Olt.

Clasa a V-a : MIHALACHE I. VASILICA (V: 1036).

Clasa a VI-a : STĂNCESCU I. ILEANA (VI: 1053, VII: 1018).

Liceul „Radu Greceanu“, Slatina-Olt.

Clasa a IV-a : NICOLESCU C. M. (IV: 850, 2, 4, 7, 8, V: 1058).

Clasa a V-a : NICOLESCU A. C. (V: 1035, 6, 7, 43, 6).

Clasa a VI-a : CONSTANTINESCU ST. S. (VI: 1053, 4*, 5*, 6, 7, 8, 61, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 71); CONSTANTINESCU I. GH. (VI: 1045, 6, 51, 2, 3, 4*, 7, 8, VII: 1013); PREDA R. A. (VI: 1053, 7, 8, 68, 9); STROE C. I. (VI: 1054*, 5, 6, 7, 8, 62, 4, 5, 6).

Clasa a VII-a : CÂRSTEA I. D. (VII: 1019, 26, 9*, 30*, 2, E. G.: 836, 7).

Clasa a VIII-a : DUMITRESCU M. M. (VIII: 946, 9, 56, 7, 62, 8, 9).

Gimnaziul Unic Surdila-Greci, Brăila.

Clasa a III-a : CIUPERCĂ G. C. (III: 353); PANAIT R. G. (III: 352*); SOCOL S. (III: 356).

Liceul „Ecaterina Teodoroiu“, Târgu-Jiu.

Clasa a VI-a : PÂRVĂNESCU V. EUGENIA (VI: 1051, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 60, 1, 2, 3, 4*, 5, 6*, 7*, 8, 9, 71*, VII: 1013, E. G.: 841).

Liceul „Tudor Vladimirescu“, Târgu-Jiu.

Clasa a III-a : BANU D. D. (III: 349, 50, 1); BANU D. N. (III: 349, 50, 1); HARANACIU E. N. (III: 349, 50, 1).

Clasa a V-a : FLONDR I. I. (V: 1032, 4, 5, 6, 7, 8, 40*, VI: 1051, 2, 3, 5*, 7, 8, VII: 1012, 9); STROESCU M. G. (V: 1032, 5, 6, 7, 42, VI: 1053, 4*, 7, 8).

Clasa a VII-a : COSOROABĂ G. V. (VII: 1021, 32, E. G.: 826, 7, 36, 7); FUIOREA I. D. (VII: 1012, 4, 5, 6, 7, 8, 9, E. G.: 827, 8); MOJET A. D. (VII: 1012, 4, 7, 8, 28*, 9*, 30*, 5*); NEGUȚ A. I. (VII: 1031, 2, 4, 5*, 6, 7*, 8, 9, 40, VIII: 967, 8, E. G.: 841, 3, 7, 9); TĂMAȘESCU D. V. (VII: 1011*, 2, 3, 5, 21, 2).

Clasa a VIII-a : BUZULOIU C. V. (VIII: 941, 2, 3*, 4, 5*).

Liceul „Papiu Ilarian“, Tg.-Mureș.

Clasa a VI-a : MORARIU A. V. (VI: 1051, 2, 3, 4, 5*, 7, 8, 9*); ȚARINĂ N. E. (VI: 1051, 3, 4, 5*, 6*, 7, 8, 9*, 60, VII: 1019).

Clasa a VIII-a : CONSTANTINESCU C. I. (VIII: 941, 2, 3, 4*, 6*, 9, E. G.: 824*); RADU S. C. (VIII: 941, 2, 4, 8, 9, E. G.: 824).

Liceul „D. A. Sturdza“, Tecuci.

Clasa a VI-a : FERU A. (VI: 1054, VII: 1021).

Liceul teoretic de fete din Timișoara.

Clasa a IV-a : GHERMĂNESCU M. MICAELA (IV: 836*, 42*, 3, 4); NICOARĂ N. VERONICA (IV: 843, 9, 51, 3*).

Clasa a V-a : GÂRLEȘTEANU M. ELIZA (V: 1042*, 4*, 5, 8*, 9*, 51, 2, 3, 4, 5*, 6, 7*, 8, 60, VIII: 956, 7, 9, E. G.: 841, 3*); NOVAC I. CORNELIA (V: 1042*, 7, 54, 5, 6, E. G.: 841).

Clasa a VI-a: LUCA M. CAROLINA (VI: 1053, 6); TRUFIN I. CECILIA (VI: 1053, 4*, 5*, 6, 7, 8, 9, 60).

Clasa a VIII-a: FERTIG ST. MARGARETA (VIII: 935*, 45*, 64, 6, 7, 71, 4, 7, 8, E. G.: 841); PETER I. VALERIA (VIII: 942*).

Colegiul „Diaconovici Loga“, Timișoara.

Clasa a V-a: ADARU C. D. (V: 1034, 5, 6, 7, 8, 46, 54); COJOCARU S. V. (V: 1052, 3, 4, 5, 6, 8); LINCA V. D. (V: 1035, 8, 52, 3, 4, 5*, 6, 8); NEGRU D. V. (V: 1036, 46, 52, 5); PASCADI D. I. (V: 1046, 52, 4, 5*, 6).

Clasa a VII-a: BLAGA A. A. (VII: 1016, 7, 8, 9).

Liceul „Piarist“ Timișoara.

Clasa a VI-a: SZABADOS A. A. (VI: 1069*, 71*, 2).

Liceul teoretic de băieți, Turda.

Clasa a III-a: INDREĂȘ I. V. (III: 351, 2, 3, 4).

Clasa a V-a: ȚARINĂ G. M. (V: 1037, 8, 54).

Clasa a VII-a: AORARU N. A. (VII: 1012, 4, 5, 6, 7, 8, E. G.: 827*); CREȚU V. V. (VII: 1014, 5, 6, 7, 8, E. G.: 827*, 8); POPA P. V. (VII: 1012, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, E. G.: 827, 8*).

Liceul „Sf. Haralambie“, Turnu-Măgurele.

Clasa a VII-a: PAPADOPOL E. P. (VII: 1021, 2, 7).

Liceul „Traian“ Turnu-Severin.

Clasa a IV-a: POPESCU E. D. (IV: 857, 8, 9).

Clasa a V-a: BĂGHINĂ A. (V: 1034, 8, 40, 2*, 6, 7, 9, 50*, 1*, 2, 3, 4, 5, 6, 7*, VI: 1062, 8, 9, VII: 1022, 32*, VIII: 956, 9, 67).

Clasa a VI-a: BUDAȘCA G. V. (VI: 1053, 4, 5, 7, 8, 66, 8, 9); LĂZĂROIU N. I. (VI: 1053, 4, 5, 7, 8, 60); STEGĂROIU I. P. (VI: 1051, 4).

Clasa a VII-a: IANAȘI D. V. (VII: 1011, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 20, 2).

EXERCIIȚII PROPUSE

Soluțiile exercițiilor propuse în acest număr se primesc până la 1 Septembrie 1948

Clasa a III-a. Exerc. 361. Un om are două locuri de casă în formă de triunghi dreptunghic și de patrat, latura patratului fiind egală cu una din catetele triunghiului. Știind că ariile acestor locuri sunt proporționale cu numerele 15 și 12 și că ambele locuri au 324 ari, să se afle dimensiunile fiecărui loc.

E. M.

III. 362. Figura limitată de un cerc și exagonul regulat înscris are aria $2,18 \text{ cm}^2$. Să se afle perimetrul figurii.

N. M.

III. 363. Să se afle latura triunghiului echilateral dacă arcul din cercul circumscris, subîntins de latură are $12,56 \text{ cm}$.

N. M.

Clasa a IV-a. Exerc. 861. Să se arate că

$$\frac{(a+x)(a-y) - (a-x)(a+y)}{(b+x)(b-y) - (b-x)(b+y)} = \frac{a}{b};$$

$$\frac{(x+a)(x-b) - (x-a)(x+b)}{(1+a)(1-b) - (1-a)(1+b)} = x.$$

C. I. Ț.

IV. 862. Fie m muchea unei piramide regulate patrulatere, i înălțimea și a apotema. Să se arate că

$$m^2 + i^2 = 2a^2.$$

N. M.

IV. 863. Suprafața corpului născut prin rotirea unui trapez dreptunghic cu înălțimea de 4 cm și latura neparalelă de 5 cm , în jurul bazei mari este de $263,76 \text{ cm}^2$. Să se afle volumul acestui corp.

E. M.

IV. 864. Se dă sistemul de ecuații

$$x-y=11; (2x-3)^2 - (3y-2)^2 = 4(x-1)(x-3) - 9(y-1)(y-2)$$

și se cere:

1°. Să se rezolve acest sistem și să se verifice apoi rădăcinile găsite.

2°. Rădăcina x a sistemului de mai sus fiind diametrul cercului de bază, iar rădăcina y fiind o treime din înălțimea unui con circular drept, exprimate fiecare în decimetri, să se calculeze suprafața laterală, suprafața totală și volumul acestui con.

E. V.

IV. 865. Pe suprafața laterală a unui cilindru de fier, introdus într-o soluție se depune o crustă groasă de 1 mm; cilindru are astfel 1199,17098 g. El este confecționat¹⁾ dintr-o prismă exagonală lungă de 12 cm și cu baza de 25,128 cm². Care este densitatea substanței depuse pe cilindru? (Se va lua densitatea fierului 7,8 și $\pi = 3,141$).

H. D.

Clasa a V-a. Exerc. 1071. Dacă $ab + bc + ca = 1$ avem

$$\frac{a^2}{1+a^2} + \frac{b^2}{1+b^2} + \frac{c^2}{1+c^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \right];$$

iar dacă $a + b + c = abc$ avem

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \right].$$

C. I. T.

V. 1072. Să se rezolve ecuația

$$4x^3 - 4ax - b^2 + 2a^3b(4x^2 - 4ax - b^2)^{-1} + a(a + 2b) = 0.$$

H. D.

V. 1073. Să se descompună în factori, expresia $ax^2 + bxy + cy^2$
Aplicație pentru $3x^2 - 8xy - 3y^2$.

H. D.

V. 1074. Să se determine m din ecuația

$$x^2 - x + m + 3 = 0,$$

știind că $x_1^3 + x_2^3 = m$. Să se verifice rezultatele obținute, rezolvând ecuația.

I. I. S.

V. 1075. Fie ecuația

$$(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0.$$

Să se formeze ecuația de gradul doi ale cărei rădăcini să fie inversele rădăcinilor ecuației date. Să se rezolve apoi ecuația formată.

E. M.

1) Cilindrul este înscris în prisma exagonală.

V. 1076. Să se rezolve sistemul

$$x^3 + x^2y^2 + y^3 = 13, \quad x^3 - x^2y^2 + y^3 = 5.$$

E. M.

V. 1077. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1 = 0,$$

exprimându-i pe urmă rădăcinile sub forma cea mai simplă.

E. V.

V. 1078. Se consideră un cerc O, un diametru AB și tangenta în A la cerc. Să se ducă o secantă la cerc, perpendiculară pe tangenta în A, care să se intersecteze cu cercul în M, N, iar cu tangenta, în P astfel încât AN să fie bisectoarea unghiului MAP.

V. GH.

V. 1079. În triunghiul ABC fie D așezat pe BC astfel ca $\overline{BD} = 2\overline{DC}$ și M mijlocul segmentului AD. BM taie pe AC în E și CM taie pe AB în F. Să se arate că $\overline{BF} = 3\overline{FA}$ și $3\overline{AE} = 2\overline{EC}$.

N. M.

V. 1080. Două cercuri concentrice au razele respectiv de 3 și 7 cm. La ce distanță de centrul lor trebuie să ducem o dreaptă, astfel încât cele trei segmente consecutive determinate de aceste cercuri pe ea să fie egale?

E. V.

Clasa a VI-a. Exerc. 1091. Să se rezolve ecuația

$$\cos x - 2 \sin x = 0,6.$$

N. M.

VI. 1092. Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tgy} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

E. M.

VI. 1093. Să se arate că

$$\frac{\sin x - \sin 3x + \sin 4x + \sin 6x - \sin 7x + \sin 9x}{\cos x - \cos 3x + \cos 4x + \cos 6x - \cos 7x + \cos 9x} = \operatorname{tg} 5x.$$

C. I. T.

VI. 1094. Fie triunghiul isoscel ABC cu unghiurile B și C egale. Din B ducem de o parte și de alta câte o dreaptă care să facă unghiuri egale cu latura BC și care se intersectează cu dreapta AC în punctele D și E.

1°. Să se arate că triunghiurile ABD și ABE sunt asemenea.

2°. Suprafața triunghiului ABC este medie proporțională între suprafețele triunghiurilor ABE și ABD.

C. I. Ț.

VI. 1095. Notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghi avem

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{3R} \sum \frac{ar_a}{r_a - r}.$$

E. M.

VI. 1096. În orice triunghi, notațiile fiind cele obișnuite avem

$$\frac{1}{r} = 2 \sum \frac{a \cotg A}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

V. GH.

VI. 1097. Să se arate că între elementele unui triunghi
 $\sum ar_a (\cos C - \cos B) = 0$; $\sum r_a (b - c) (1 + \cos A) = 0$.

H. D.

VI. 1098. Să se rezolve ecuațiile

$$\text{arc tg } x = \text{arc tg } \frac{1}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{3} \quad ; \quad 2 \text{ arc tg } \frac{1}{2} = \text{arc tg } x.$$

I. I. S.

VI. 1099. Să se arate că

$$\frac{\text{tg arc sin } x}{\sin \text{ arc tg } x} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}; \quad (\text{tg arc sin } x + \text{tg arc cos } x) \sin \text{ arc tg } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}.$$

C. I. Ț.

VI. 1100. Să se demonstreze identitățile următoare

$$\text{arc tg } \frac{2x-y}{y\sqrt{3}} + \text{arc tg } \frac{2y-x}{x\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{arc tg } \frac{2x-y}{y\sqrt{3}} + 2 \text{ arc tg } \frac{2y-x}{x\sqrt{3}} = \text{arc tg } \left(\frac{x+y}{x-y} \cotg \frac{\pi}{3} \right).$$

V. GH.

Clasa a VII-a. Exerc. 1051. Să se calculeze determinantul

$$D \equiv \begin{vmatrix} \sin\beta \sin\gamma & \sin(\beta + \gamma) & \cos\beta \cos\gamma \\ \sin\gamma \sin\alpha & \sin(\gamma + \alpha) & \cos\gamma \cos\alpha \\ \sin\alpha \sin\beta & \sin(\alpha + \beta) & \cos\alpha \cos\beta \end{vmatrix}.$$

V. C.

VII. 1052. Să se calculeze determinantul

$$D \equiv \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin\alpha \sin\beta & \sin(\alpha + \beta) & \cos\alpha \cos\beta \\ \sin^2\beta & \sin 2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}.$$

V. C.

VII. 1053. Dacă $|x| > 1$ avem

$$1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \dots = \frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

C. I. Ț.

VII. 1054. Să se reprezinte funcția

$$y = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x - 1}.$$

N. M.

VII. 1055. Să se studieze variația funcției

$$y = \log x^2 - \frac{x-4}{x-2}.$$

I. I. S.

VII. 1056. Să se afle natura și suma seriei de termen general

$$u_n = \frac{n-3}{n(n+1)(n+2)} \quad (n = 4, 5, 6, \dots).$$

N. M.

VII. 1057. Se consideră funcția

$$x = \log \frac{xy}{x^4 + y^4}.$$

Să se arate că

$$xz'_x + yz'_y + 2 = 0.$$

N. M.

VII. 1058. Să se afle, pentru $x \rightarrow 0$ limita expresiei

$$\frac{e^x - e^{-x} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^3}{3} - 2x}{\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x - \sin x}.$$

N. M.

VII. 1059. Să se afle

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} - 1 \right).$$

I. I. S.

VII. 1060. Fie Ox , d , d' trei drepte oarecare în plan. O perpendiculară mobilă pe Ox taie pe d în m și pe d' în m' ; perpendiculara în m pe d taie pe Ox în v și perpendiculara în v pe Ox taie în v' paralela din m' la Ox . Să se afle locul geometric al punctului v' .

N. M.

Clasa a VIII-a. Exerc. 981. Să se afle ecuația dreptei care trece prin intersecția dreptelor

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p = 0 \quad , \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p = 0$$

și prin intersecția dreptelor

$$x \cos \beta_1 + y \sin \beta_1 - p = 0 \quad , \quad x \cos \beta_2 + y \sin \beta_2 - p = 0.$$

V. C.

VIII. 982. Un pătrat ABCD de latură egală cu 5 cm se sprijină cu vârfurile A și B pe axele de coordonate Ox și Oy . 1°. Să se afle locul geometric al intersecției diagonalelor. 2°. Dacă $\overline{OA} + \overline{OB} = 7$ să se afle coordonatele vârfurilor patrului și ale intersecției diagonalelor.

E. M.

VIII. 983. Se dau ecuațiile

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 = 5.$$

1°. Să se afle intersecțiile celor două curbe.

2°. Să se arate că tangentele într'unul din punctele de intersecție împreună cu axa Ox formează un triunghi isoscel.

3°. Să se calculeze perimetrul și suprafața triunghiului.

H. D.

VIII. 984. Să se determine p, q, r astfel încât polinomul

$$x^7 + px^6 + qx^4 + rx^3 - (r - 10)x^2 + 36q$$

să se împartă exact prin $x^3 + 2$. Câtul diviziunii.

Generalizare pentru cazul diviziunii unui polinom $P(x)$ prin $x^3 - a$.

V. C.

VIII. 985. Să se rezolve ecuația cu coeficienți raționali

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1 = 0$$

știind că $x_1^2 = 7 - 4\sqrt{3}$, $x_2^4 = 1$, $x_3^4 = 1$.

C. I. Ț.

VIII. 986. Se dă ecuația

$$x^4 - 4\alpha x^3 + 2\beta x^2 - 4\alpha(\alpha^2 - 1)x + 1 = 0$$

în care α și β sunt doi parametri variabili și se cere:

1°. Să se determine expresia parametrului β în funcție de parametrul α , astfel încât derivata acestei ecuații să aibă rădăcinile în progresie aritmetică.

2°. Parametrul β fiind astfel determinat, să se studieze apoi natura rădăcinilor ecuației de mai sus, când parametrul α variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

3°. Să se rezolve direct ecuația de mai sus, în cazurile particulare când $\alpha = \pm \sqrt{2}$, β având valorile respectiv corespunzătoare din expresia lui, determinată la 1°.

E. V.

VIII. 987. Se dă ecuația

$$x^3 + \alpha x^2 + x - \alpha = 0$$

în care α este un parametru variabil și se cere:

1°. Să se studieze natura rădăcinilor acestei ecuații când parametrul α variază de la $-\infty$ la $+\infty$.

2°. Să se determine direct toate valorile lui α , inclusiv cele imaginare, dacă există, pentru care ecuația de mai sus admite câte o rădăcină dublă.

3°. Să se rezolve complet ecuația de mai sus, dând expresia exactă a rădăcinilor ei, în fiecare din cazurile particulare corespunzătoare valorilor lui α determinate sub punctul precedent.

E. V.

VIII. 988. Să se discute natura rădăcinilor ecuațiilor

$$\lambda(x-1)^3 - x^3 = 0, \quad \lambda(x+1)^3 - x^3 = 0,$$

λ variind dela $-\infty$ la $+\infty$.

I. I. S.

VIII. 989. Să se afle înălțimea unui con, cunoscând volumul de 314 m^3 și generatoarea de 13 m .

N. M.

VIII. 990. Fie o călimară formată dintr'un vas cubic de latură a pe care este un cilindru de rază $\frac{a}{3}$ și înălțime $\frac{2a}{3}$. Să se determine poziția centrului de greutate. Presupunând greutatea călimării G , să se determine ce lungime poate avea o bară de greutate tot G pentru ca această călimară cu bara în ea, rezemându-se în mijlocul unei laturi a bazei și de buza superioară să nu se răstoarne.

G. Ț.

Exerciții generale. Exerc. 861. Fie M un punct mobil pe cercul de diametru AB . Se iau pe $\overline{BM}$ punctele P, P' așa încât $\overline{PM} = \overline{P'M} = \overline{AM}$. Perpendiculara pe mijlocul lui AB întâlnește cercul dat în D și D' . Să se arate că, dacă se notează convenabil punctele D, D' atunci triunghiurile DAP și $D'AP'$ sunt isoscele.

GH. B.

E. G. 862. Fie A' piciorul bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC și P intersecția razei OA a cercului circumscris cu perpendiculara în A' pe BC . Să se calculeze lungimea PA' în funcție de laturile triunghiului ABC .

GH. B.

E. G. 863. Dacă x și y sunt unghiuri oarecare, avem

$$8 \sin x \sin y \cos(x+y) \leq 1.$$

C. I. Ț.

E. G. 864. Dacă x', x'' sunt două rădăcini ale ecuației

$$\alpha \cos x + \beta \sin x = \gamma$$

să se calculeze

$$1^0. \quad A(\sin^2 x' + \sin^2 x'') + B(\cos^2 x' + \cos^2 x'').$$

$$2^0. \quad \operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x''.$$

$$3^0. \quad \operatorname{tg} \frac{x'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{x''}{2} + p \left(\operatorname{tg} \frac{x'}{2} + \operatorname{tg} \frac{x''}{2} \right) + q.$$

V. C.

E. G. 865. Într'un triunghi ABC dreptunghic în A, perpendicularele pe ipotenuză duse din punctele B și C taie în prelungire catetele AC și AB respectiv în punctele B_1 și C_1 ; iar dreptele BC și B_1C_1 se taie într'un punct D. Să se arate că

$$\text{tg } AC_1B_1 = \text{tg}^3 ACB ; 2 \text{tg } B_1C_1C = -2 \cotg CDC_1 = \text{tg } 2 ACB.$$

C. I. Ț.

E. G. 866. Să se arate că

$$\frac{\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \cos ka}{\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \cos ka} = \frac{\sin na}{\sin (n+1) a}.$$

C. I. Ț.

E. G. 867. Să se studieze variația lui y , dat de ecuația $b(1+m^2)y^2 + (2abm - 2b^2 - a^2m^2 - b^2m^2)y + a^2bm^2 + b^3 - 2ab^2m = 0$, când m variază de la $-\infty$ la $+\infty$, a și b rămânând constante.

GH. B.

E. G. 868. Limita expresiei

$$y = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c} \right)^{\frac{1}{x}}$$

când $x \rightarrow 0$. (Fără regula lui HOPITAL).

V. C.

E. G. 869. Considerăm o parabolă p și o dreaptă d . O perpendiculară mobilă pe axă taie parabola în M_1 , M_2 și pe d în U . Conjugatul lui U în raport cu M_1 , M_2 descrie o iperbolă echilateră ce trece prin origine.

Caz particular, d trece prin vârful parabolei.

N. M.

E. G. 870. Se consideră două drepte fixe Ox , Oy și se duc drepte variabile păstrând direcția lor constantă, care întâlnesc dreptele Ox , Oy respectiv în A și M . Luăm pe AB un punct M astfel încât $AM \cdot MB = k^2$. Locul punctului M .

V. C.

ERATĂ. 1°. Soluțiile exercițiilor din Nr. 6 se primesc până la 1 Septembrie.

2°. La pag. 148, rândul al doilea de sus, înaintea ex. 992 se va trece numele rezolvitorului: JUHAS P.

3°. La pag. 196, ex. 856, rândul 5 se va corecta astfel: iar cea albă cu pană verde și pană roșie costă 800 lei.

INȘTIINȚARE

Numărul 1 Anul XV al S. G. M. va apare la 1 Octomvrie 1948, și va conține și clasificarea corespondenților după activitatea lor la Suplimentul cu exerciții în anul XIV.

Abonamentul anual este de Lei 360 și se poate trimite pe adresa: Casa „Gazeta Matematică”, Calea Griviței 158 București, prin mandat poștal sau cont CEC Nr. 26220.

Drepturile de reproducere rezervate Societății «Gazeta Matematică».

Elevii claselor VI, VII și VIII, cu bogată activitate la această revistă își pot lărgi cadrul activității rezolvând și probleme din „Gazeta Matematică”.

În Biblioteca Societății „Gazeta Matematică” au apărut și se găsesc următoarele:

- IV. A. G. Ioachimescu, *Culegere de Probleme de Mecanică*. Ediția a III-a. Revăzută și adăugită de *Gabriela Țițeica* Lei 270
- XI. *Gazeta Matematică* 1895—1935. Istoric, învățăminte. Volum jubilar (500 pag.) Lei 90
- XIII. I. Ionescu, *Culegere de Probleme de Aritmetică*. Partea I. Aritmetica rațională Lei 450
- XIX. V. Cristescu, *Culegere de Probleme de Trigonometrie*. Partea III-a (Trigonometrie sferică). Revăzută și adăugită de G-ralul Gh. I. Liteanu. Lei 130
- XX. I. I. Chițulescu, *Culegere de probleme de Geometrie Descriptivă*. Partea I Lei 160
- XXI. M. Ghermănescu, *Trigonometria plană și sferică cu aplicații la Artilerie, Analitică, Mecanică, Topografie, Astronomie, etc.* Lei 450
- XXII. G. Țițeica, *Culegere de Probleme de analitică*. Ediția II. Partea II adăugită de N. G. Botea și C. Ionescu-Bujor Lei 230
- XXIII. *Gazeta Matematică* 1895—1945 (Decada 5-a Istoric), învățăminte. Volum jubilar (288 pag.) Lei 90
- XXIV. A. G. Ioachimescu, *Mecanică rațională*, Curs predat la Școala Politehnică din București, revăzut și adăugit după îndrumările autorului, de *Gabriela Țițeica* și *Al. Stoenescu* Lei 1.270

Biblioteca Istorică a GAZETEI MATEMATICE

- I. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile I — VI de Geometrie plană) tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 300
- II. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile VII—IX de Aritmetică și Cartea X a Irraționalelor), tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 360
- III. *Elementele lui Euclid*. (Cărțile XI—XIII de Geometrie în spațiu; Cartea XIV a lui HYPICL și Cartea XV apocrifă), tradusă din limba greacă de V. Marian Lei 180

Biblioteca Matematică „GEORGE ȚIȚEICA”

- I. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice* Lei 230

Pentru biblioteci și autorități toate prețurile se triplează.

Pentru volumele din Colecția și Bibliotecile din „Gazeta Matematică” de trimis în provincie se va plăti anticipat un plus de 15% din preț pentru taxele de expediție.

„Gazeta Matematică” apare la 15 ale fiecărei luni. Abonamentul începe dela 15 Septembrie, oricând s’ar face achitarea lui în cursul anului și nu se face pe termene mai scurte de un an. Abonamentul costă Lei 800